

## Sequência vetorial-numérica para a análise estrutural gráfica de edifícios históricos de alvenaria com arcos e sistemas simétricos

C. Torres<sup>1\*</sup> , J. Rosas<sup>2</sup> , O. Pérez<sup>2</sup> 

\* Autor de Contato: [ktcate2@hotmail.com](mailto:ktcate2@hotmail.com); [ctorresmo@ipn.mx](mailto:ctorresmo@ipn.mx)

DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v14i2.717>

Recebido: 22/12/2023 | Correções recebidas: 10/05/2024 | Aceito: 14/05/2024 | Publicado: 15/05/2024

### RESUMO

O objetivo desta pesquisa é mostrar a aplicação da sucessão numérico-vetorial na análise estrutural de edifícios históricos de alvenaria, com arcos e sistemas simétricos, incluindo processos matemáticos na análise gráfica antiga, enfatizando a importância das cargas na estabilidade estrutural. Baseia-se a análise em três etapas fundamentais: reconhecimento do sistema construtivo do objeto patrimonial, discretização geométrica do sistema e análise vetorial sob diferentes considerações físicas. Assim, as linhas de impulso são afetadas pelas cargas, pelas condições de fronteira e pela história do comportamento estrutural. As ferramentas numéricas e computacionais oferecem processos de análise gráfica mais rápidos e precisos. Conclui-se que estes métodos fornecem resultados muito particulares e alguns deles são semelhantes, por isso recomenda-se utilizar os métodos como complemento e não classificar um sobre o outro.

**Palavras-chave:** análise estrutural; edifícios históricos; análise vetorial; arcos de alvenaria; método gráfico.

**Citar como:** Torres, C., Rosas, J., Pérez, O. (2024), “*Sequência vetorial-numérica para a análise estrutural gráfica de edifícios históricos de alvenaria com arcos e sistemas simétricos*”, Revista ALCONPAT, 14 (2), pp. 191 – 210, DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v14i2.717>

<sup>1</sup> Research professor at Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI), Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Tecamachalco (ESIA UT), Instituto Politécnico Nacional (IPN), 53950, Naucalpan de Juárez, Estado de México, México, <http://www.sepi.esiatec.ipn.mx>.

<sup>2</sup> Bachelor's student at Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Tecamachalco (ESIA UT), Instituto Politécnico Nacional (IPN), 53950, Naucalpan de Juárez, Estado de México, México, <http://www.esiatec.ipn.mx>.

### Contribuição de cada autor

Neste trabalho o autor 1 contribuiu com 100% da ideia original, direção e redação final, o autor 2 contribuiu com 60% da redação inicial do documento e 70% da elaboração das figuras e discussão dos resultados, o Autor 3 contribuiu com 40% da redação inicial e coleta de dados.

### Licença Creative Commons

Copyright (2024) é propriedade dos autores. Este trabalho é um artigo de acesso aberto publicado sob os termos e condições de uma Licença Internacional Creative Commons Atribuição 4.0 ([CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)).

### Discussões e correções pós-publicação

Qualquer discussão, incluindo a resposta dos autores, será publicada no primeiro número do ano 2025, desde que a informação seja recebida antes do fechamento do terceiro número do ano de 2024.

## **Numerical-vector succession for the graphical structural analysis of historic masonry buildings with arches and symmetrical systems.**

### **ABSTRACT**

The objective of this research is to denote the application of numerical-vector succession in the structural analysis of historical masonry buildings, with arches and symmetrical systems, including mathematical processes in ancient graphic analysis, emphasizing the importance of loads in the structural stability. We based the analysis on three fundamental stages: recognition of the construction system of the heritage object, geometric discretization of the system and vector analysis under different physical considerations. Hence, the thrust lines are affected by the loads, boundary conditions and history of structural behaviour. Numerical and computational tools offer faster and more accurate graphic analysis processes. It is concluded that these methods provide very particular results and some of them are similar, therefore, it is recommended to use the methods as a complement and not to catalogue one over the other.

**Keywords:** structural analysis; historic buildings; vector analysis; masonry arches; graphic method.

## **Sucesión numérico-vectorial para el análisis estructural gráfico de edificios históricos de mampostería con arcos y sistemas simétricos**

### **RESUMEN**

El objetivo de esta investigación es denotar la aplicación de la sucesión numérico-vectorial en el análisis estructural de edificios históricos de mampostería, con arcos y sistemas simétricos, incluyendo procesos matemáticos en el análisis gráfico antiguo, enfatizando la importancia de las cargas en la estabilidad estructural. Los análisis se basan en tres etapas fundamentales: reconocimiento del sistema constructivo del objeto patrimonial, discretización geométrica del sistema y análisis vectorial bajo diferentes consideraciones físicas. Así, las líneas de empuje se ven afectadas por las cargas, las condiciones de contorno y la historia del comportamiento estructural del objeto patrimonial. Las herramientas numéricas y computacionales ofrecen procesos de análisis gráfico más rápidos y precisos.

Se concluye que estos métodos proporcionan resultados muy particulares y algunos de ellos son similares, por lo que se recomienda utilizar los métodos como complemento y no catalogar uno sobre el otro.

**Palabras clave:** análisis estructural; edificios históricos; análisis vectorial; arcos de mampostería; método gráfico.

### **Informações legais**

Revista ALCONPAT é uma publicação trimestral da Associação Latino-Americana de Controle de Qualidade, Patologia e Recuperação de Construção, Internacional, A.C., Km. 6, antiga estrada para Progreso, Merida, Yucatán, C.P. 97310, Tel.5219997385893, [alconpat.int@gmail.com](mailto:alconpat.int@gmail.com), Website: [www.alconpat.org](http://www.alconpat.org)

Reserva de direitos de uso exclusivo No.04-2013-011717330300-203, eISSN 2007-6835, ambos concedidos pelo Instituto Nacional de Direitos Autorais. Editor responsável: Dr. Pedro Castro Borges. Responsável pela última atualização deste número, Unidade de Informática ALCONPAT, Eng. Elizabeth Sabido Maldonado.

As opiniões expressas pelos autores não refletem necessariamente a posição do editor.

A reprodução total ou parcial do conteúdo e das imagens da publicação é realizada de acordo com o código COPE e a licença CC BY 4.0 da Revista ALCONPAT.

Sequência vetorial-numérica para a análise estrutural gráfica de edifícios históricos de alvenaria com arcos e sistemas simétricos

## 1. INTRODUÇÃO

A análise estrutural de edifícios patrimoniais é uma atividade que, além de praticada há séculos, adquiriu atualmente interesse internacional, ao qual se somam diversos aspectos técnicos. A gênese das teorias do comportamento estrutural deste tipo de edifícios reside numa análise vetorial (método gráfico) que determina o equilíbrio dos seus elementos, como arcos, abóbadas, cúpulas, pilares, encontros, contrafortes, arcobotantes etc.

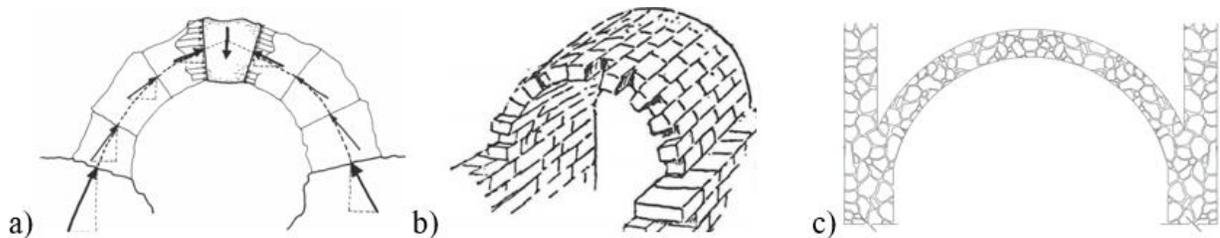


Figura 1. Vários tipos de arcos de alvenaria utilizados em edifícios históricos: a) sistema de aduelas com silhares irregulares (Huerta, S., 2006); b) sistema de aduelas com silhares regulares (Heyman, J., 1995) c) abóbada de alvenaria irregular com argamassa (Segovia, MA, 2022).

Arcos com diferentes configurações de alvenaria são mostrados na Figura 1. Estes tipos de arcos são essenciais na definição do comportamento estrutural dos edifícios históricos em alvenaria. O *Comité Científico Internacional para el Análisis y Restauración de Estructuras del Patrimonio Arquitectónico* (ISCARSAH., 2003), é um comité técnico do *Consejo Internacional de Monumentos y Sitios* (ICOMOS, 2003), refere nos seus princípios e diretrizes que as estruturas de objetos patrimoniais devem ser conhecidas e compreendidas na sua totalidade, o que implica a aplicação de métodos antigos de análise estrutural para compreender o funcionamento e comportamento estrutural, bem como as técnicas que foram utilizadas no passado para a sua construção. Atualmente, a análise estrutural tem evoluído utilizando modelos analíticos e computacionais, acompanhada de pesquisas experimentais que apoiam o processo de avaliação estrutural. No entanto, ambos os tipos de análise enfrentam diversas limitações. Portanto, embora tenha havido grandes avanços na análise estrutural computacional, o uso de ferramentas antigas continua essencial para tentar situar-se na visão possível do antigo estruturalista e assim compreender o equilíbrio estrutural.

Para vislumbrar os problemas envolvidos na análise de edifícios históricos em alvenaria não armada e irregular, são citados alguns pesquisadores de todo o mundo que trabalham no assunto, para citar alguns: Block, P., et. al., (2006), que afirmam que ferramentas estáticas gráficas, interativas e de análise de limites baseadas em procedimentos gráficos fornecem métodos para caracterizar e avaliar a estabilidade estrutural de sistemas complexos de alvenaria que são eficientes e rápidos de processar, Chávez M., (2005/ 2010) forneceu informações valiosas sobre o comportamento estrutural de sistemas de edifícios históricos completos e propriedades mecânicas de alvenaria, modeladas com elementos finitos contínuos. Por outro lado, Angelillo M., et al., (2014), trabalharam em procedimentos de análise estrutural de sistemas e elementos históricos de alvenaria discretizados, considerando a interação de contato entre eles. Durán D., et. al., (2022), que estudaram as propriedades mecânicas de igrejas antigas localizadas em diferentes partes do mundo.

## 2. RECONHECIMENTO DO SISTEMA ESTRUTURAL DO OBJETO PATRIMÔNIO

O objeto patrimonial analisado é um templo mexicano datado do século XVI, localizado no Estado de Hidalgo no município de Santa Catarina, sua estrutura original foi feita com pedras irregulares e argamassa de barro do local, possui 6 contrafortes nas paredes laterais, estas últimas servem de base à abóbada de berço contínua que é confinada e carregada na sua parte superior com terra do local. A Figura 2 mostra a construção antes e depois da integração de elementos de concreto armado e apresenta indícios do seu comportamento estrutural.



Figura 2. Templo de Santa Catarina; a) edifício preservado (Biblioteca Tomás Navarro Tomás, 2023); b) estado atual do templo; c) e d) fissuras na abóboda. Retirado de (Segóvia, MA, 2022).

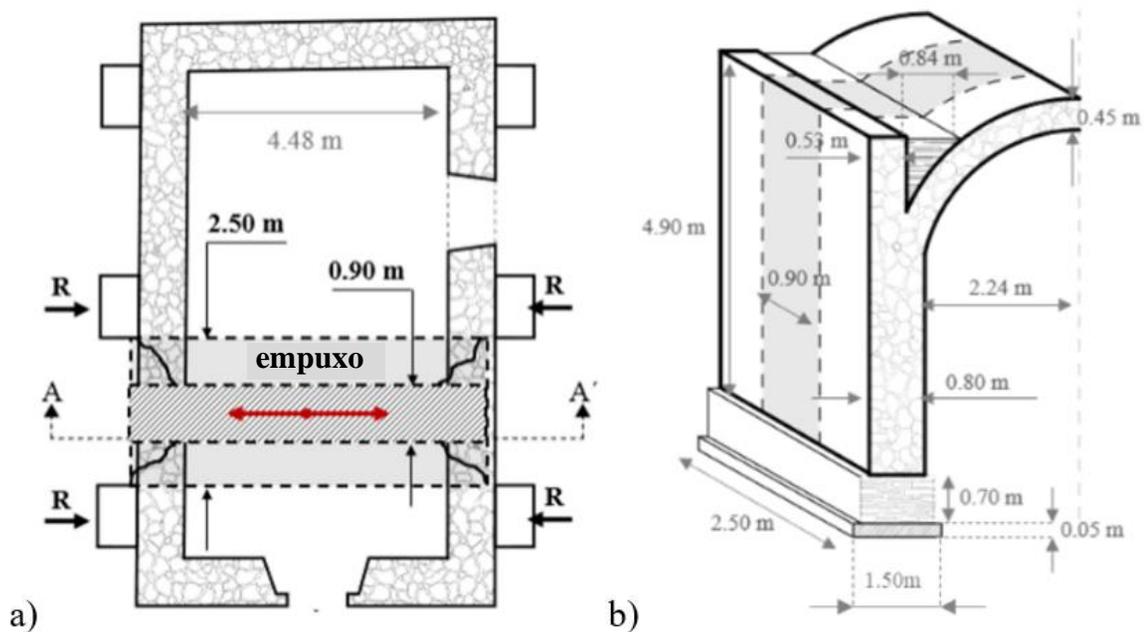


Figura 3. Faixas selecionadas para análise; a) vista em planta; b) vista tridimensional das faixas Fr1 e Fr2 com larguras de 0,90 m e 2,50 m, respectivamente. Dimensões em metros.

### 3. DISCRETIZAÇÃO GEOMÉTRICA DOS SUBSISTEMAS

São selecionadas as tiras com maior suscetibilidade à deformação lateral. Desde que não estejam totalmente restringidos pelos contrafortes (ver figura 4).

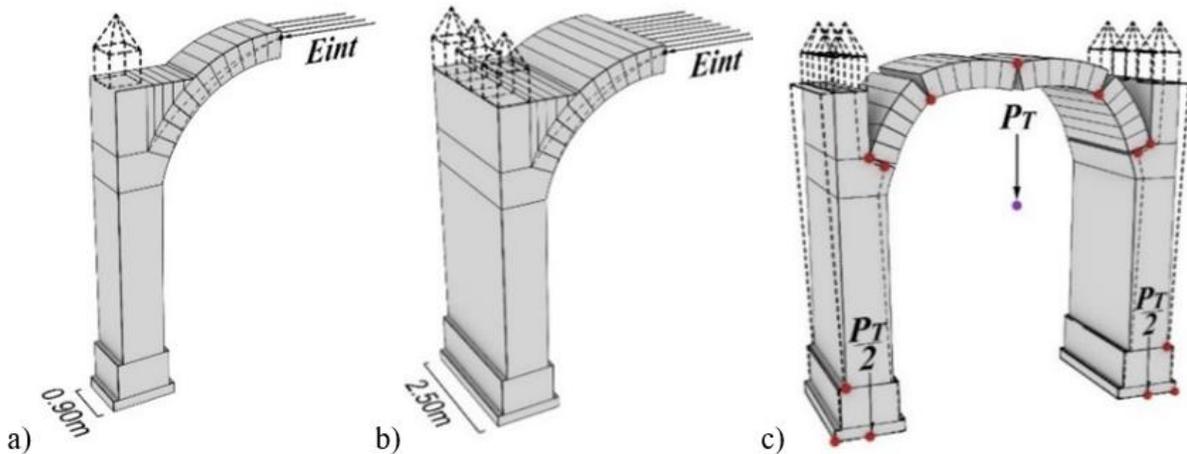


Figura 4. Vista 3D das faixas Fr (subsistemas) selecionadas para análise, a) subsistema Fr1 de 0,90 m, b) subsistema Fr2 de 2,50 m de largura, c) representação da formação de dobradiças em pontos específicos análoga à do objeto patrimonial real (ver figura 3). Dimensões em metros.

Na figura 4, para ambos os sistemas, o empuxo horizontal intermediário ( $E_{int}$ ) é exemplificado próximo ao empuxo mínimo ( $E_{min}$ ) (ver figura 8). Teoria retirada de (Heyman, J., 1995; Huerta, S., 2004, Mas-Guindal; AJ, 2021). Nas paredes é adotada fissuração por tensão diagonal a 45 graus, semelhante à do concreto não armado (Meli, R. 2011). Ao contrário dos edifícios atualmente construídos com materiais e sistemas construtivos contínuos, a formação de dobradiças não representa como tal uma degradação da rigidez, mas indica os pontos de equilíbrio e padrões de comportamento das condições físicas atuais do objeto patrimonial. Os elementos estruturais pertencentes às faixas selecionadas são discretizados geometricamente (ver Figura 5), a geometria é modelada com a tendência de comportamento estrutural que o objeto patrimonial apresenta ou apresentou, para localizar os pontos de contato e assim visualizar a formação de possíveis dobradiças, que serve de base teórica para gerar divisões virtuais em modelos geométricos. As linhas tracejadas são possíveis pináculos para redirecionar vetores de empuxo (ver figuras 6 e 10).

### 4. SUCESSÃO NUMÉRICO-VETORIAL DO SUBSISTEMA

A análise vetorial consiste na representação de forças com determinadas magnitudes e direções que dão origem a uma sequência de impulsos ou reações entre os diferentes elementos volumétricos (blocos) que compõem o sistema analisado; neste documento, esta análise é utilizada para a representação gráfica das cargas gravitacionais geradas por cada um dos blocos (ver Figura 5) e para a simulação dos vetores resultantes. São também considerados elementos mecanicamente homogêneos e isotrópicos com resistência praticamente infinita, sem deslizamento entre blocos e sem esforços de tração, conforme (Heyman, J. 1969; Huerta, S. 2004). Devido a edificação possuir terra compactada, considera-se que ela possui densidade de  $1.600 \text{ kg/m}^3$ , vale ressaltar que a terra pode assumir outros pesos nos períodos chuvosos, já que o peso da terra úmida, segundo (Minke, G. 1994) poderia aumentar até  $1.800 \text{ kg/m}^3$ . Porque o peso volumétrico é essencial para manter o equilíbrio deste tipo de estruturas, são utilizados  $2.700 \text{ kg/m}^3$ , uma vez que, ao determinar as linhas

de impulso com parâmetro inferior, estas saem fora da geometria (ver figura 10). Quanto às características físicas determinadas por (Chávez, Mauricio M. 2010), constatou que o peso volumétrico possível de alvenaria irregular unida com argamassa de cal é de  $1.627\text{kg/m}^3$ .

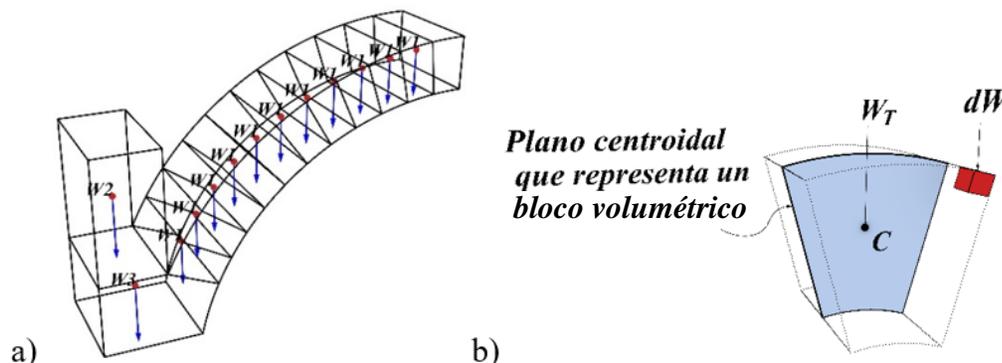


Figura 5. Centros de gravidade dos blocos que formam o sistema, a) forças gravitacionais ( $W$ ) concentradas nos elementos estruturais discretizados, b) peso total ( $W_T$ ) e peso diferencial ( $dW$ ) de cada elemento atomizado, onde:  $C$  = Centro de gravidade.

Na Figura 5, a teoria foi retirada e adaptada de (Egor, PP e Toader, AB 1999; Goodno, BJ e Gere, JM, 2013; Hibbeler, RC 2016). As variáveis vetoriais ( $W \rightarrow i$ ) são representadas com uma seta conforme (Spiegel, MR 1970).

Como o elemento discretizado é isotrópico e homogêneo, seu peso total é a soma dos pesos diferenciais (ver equação 1 e figura 6b). (Hibbeler, RC 2016) menciona que, se um corpo for feito de um material homogêneo, ele possui densidade constante e a força gerada pelo peso do corpo passa por um centro volumétrico (centro de gravidade). Aplicando estes princípios ao objeto apresentado na Figura 5a, é possível visualizar os vetores gravitacionais que se cruzam com o centro de gravidade de cada elemento homogêneo e discretizado. A Figura 6 ilustra os planos médios e seu suporte matemático para localizar e representar os centros de gravidade de elementos volumétricos do tipo aduelas, idealizados como elementos planos (áreas). As equações (2)-(7) definem o acima exposto; aplicando estas expressões matemáticas, são determinadas tanto as superfícies dos planos discretizados dos blocos que representam os segmentos, como as ordenadas dos seus centros de gravidade. O centro de gravidade é calculado com momentos de primeira ordem (Egor, PP e Toader, AB 1999; Goodno, BJ e Gere, JM 2013).

$$\Sigma dW = W_T \quad (1)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 dA_1 + x_2 dA_2 + \dots + x_n dA_n}{A} = \frac{\Sigma x dA_i}{A} \quad (2)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 dA_1 + y_2 dA_2 + \dots + y_n dA_n}{A} = \frac{\Sigma y dA_i}{A} \quad (3)$$

$$\Sigma dA_i = A \quad (3')$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad (4)$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \quad (5)$$

$$\bar{y} = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha} \quad (6)$$

$$A_{fc} = \alpha \cdot r^2 \quad (7)$$

Onde:  $dW$ = peso diferencial do elemento,  $W_T$ = Peso Total do elemento,  $x$ = distância do eixo “x” ao centróide de  $dA$ ,  $y$ = distância do eixo “y” ao centróide de  $dA$ ,  $dA$ = área diferencial,  $i= 1$  a  $n$ ,  $n$ = número de elementos discretizados,  $A$ = área total,  $A_{fc}$ = área do cone,  $\alpha$ = ângulo,  $r$ = raio do setor circular.

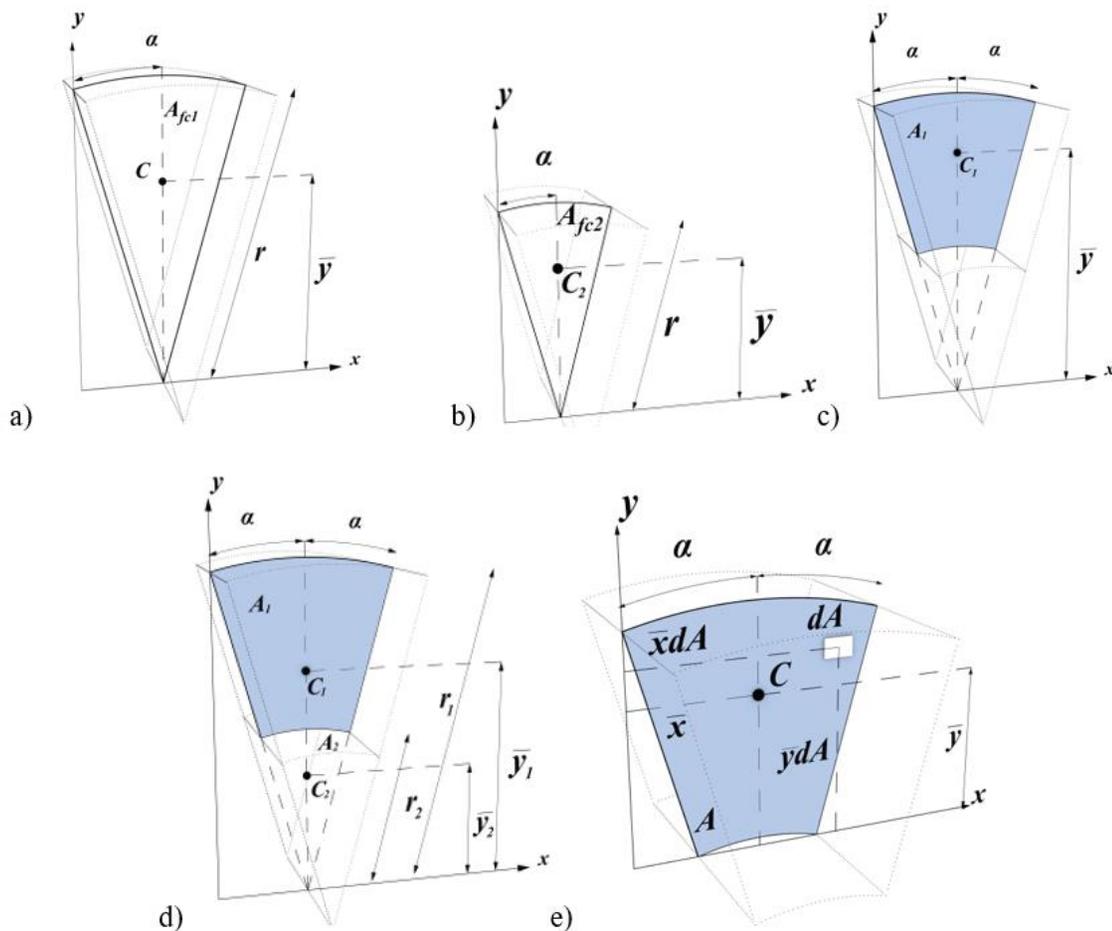


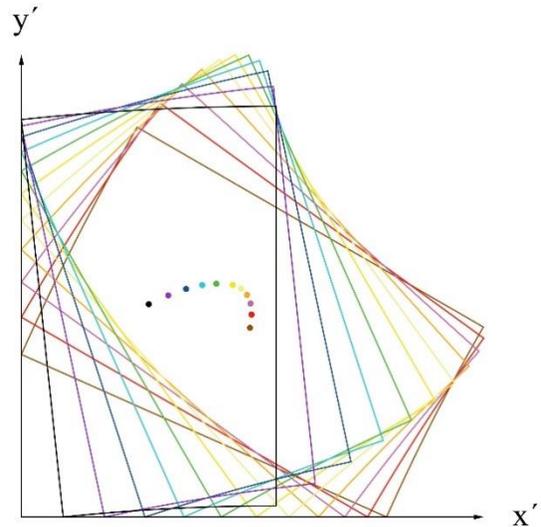
Figura 6. Sequência matemática para obtenção dos centros de gravidade dos blocos, a) plano completo (Área) representativo da forma original, b) plano a ser subtraído da forma original, c) plano do segmento resultante, d) discretização das propriedades geométricas das áreas A1 e A2, e) Centro volumétrico do bloco discretizado como segmento resultante.

Na Figura 6,  $A_{fc}$  = Área do formato cônico,  $C_1$  = Centro de gravidade de  $A_1$ ,  $C_2$  = Centro de gravidade de  $A_2$ ,  $A_1$  = Área restante após a subtração,  $A_2$  = Área esquerda da subtração,  $\alpha$  = Ângulo de abertura (em graus) do setor circular ao eixo centróide,  $g$  = geratriz cônica,  $\bar{y}_1$  = Distância do eixo “x” ao centróide de  $A_1$ ,  $\bar{y}_2$  = Distância do eixo “x” ao centróide de  $A_2$ ,  $A$  = Área resultante,  $C$  = Centro de gravidade de  $A$ ,  $dA$  = Área parcial,  $r$  = raio, O ângulo  $\alpha$  é afetado por  $(\pi/180)$  para converter em radianos.

Com as expressões numéricas apresentadas na Figura 6 obtêm-se as propriedades geométricas para a análise do subsistema arco (ver Figura 7). Na Figura 6, os elementos discretizados (segmentos) são sobrepostos para diferenciar o centro de gravidade com base na sua posição em relação aos eixos locais ( $x'$ ,  $y'$ ), porém, neste caso todos os elementos do subsistema arco possuem o mesmo peso volumétrico (ver tabela 3). A linha de impulso (linha de compressão) modifica sua trajetória sucessivamente quando praticamente intercepta a linha vertical do centro de gravidade de cada segmento. Caso a linha de compressão saia da geometria, significa que a compressão estaria fora do elemento  $e$ , portanto, os blocos não estariam mais em contato entre si naquele trecho. O empuxo mínimo é representado como uma força horizontal na área superior dos segmentos, comumente chamada de extradorso de aduela. No caso de um sistema de gravidade simétrico, basta analisar uma metade (ver figura 9) para conhecer a trajetória da linha de impulso de compressão, por isso é essencial determinar adequadamente as cargas de gravidade e os centros de gravidade de cada um dos blocos, pois disso depende a geração correta de empuxo entre blocos adjacentes.

Tabela 1. Centros de gravidade numéricos e código de cores dos segmentos discretizados que compõem o subsistema arco (ver figura 7).

EL <sub>i</sub>	CE <sub>i</sub>	$\bar{x}'_i$ (m)	$\bar{y}'_i$ (m)
1		0.1547	0.2397
2		0.1756	0.2496
3		0.1945	0.2568
4		0.2114	0.2612
5		0.2259	0.2627
6		0.2379	0.2614
7		0.2473	0.2572
8		0.2541	0.2501
9		0.2580	0.2402
10		0.2591	0.2280
11		0.2571	0.2127



7. Discretização virtual por blocos (aduelas) do subsistema em arco, onde: EL: Elemento discretizado, CE: Cor do elemento,  $A$  = Área do plano centroidal,  $i=1$  a  $n$ ,  $n$ = número dos elementos discretizados (11 para o subsistema arco do objeto de estudo, ver figuras 4 e 9).

Para determinar a trajetória da linha de empuxo, proveniente do subsistema tipo arco, é necessário selecionar o local exato e/ou o mais crítico possível com base no estado do objeto físico real. Se a análise for realizada com o empuxo crítico mínimo, praticamente cruzando o vértice, significaria que o referido subsistema está em colapso iminente. Para determinar a trajetória da linha de empuxo, o polígono funicular e o polígono de forças podem ser utilizados para fornecer o fluxo de forças nos elementos estruturais de sistemas com formatos alternativos (Markou, AA e Ruan, G. 2022). A Figura 8 mostra o empuxo horizontal mínimo e a modificação de sua trajetória em

cada elemento (bloco), devido à interação com as forças atuantes nos centros de gravidade. A Tabela 2 apresenta as propriedades que representam e configuram cada elemento dos sistemas Fr1 e Fr2 com paredes e fundações.

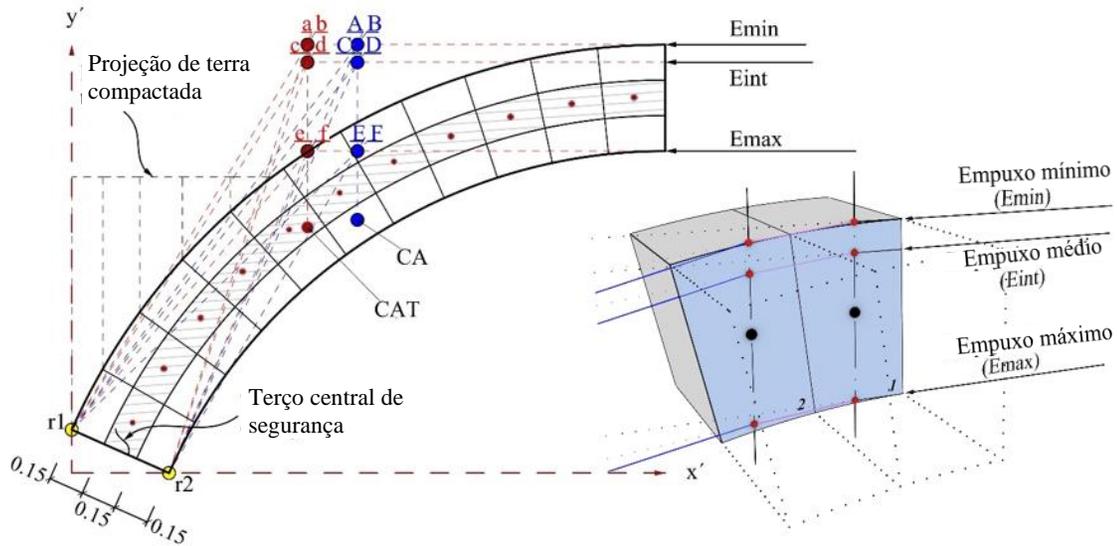


Figura 8. Sucessão de vetores em cada segmento, gerados pelos impulsos laterais, ilustrando a modificação das trajetórias ao cruzar a projeção da linha vertical que passa pelo centro de gravidade de cada elemento. Arco do subsistema e identificação das possíveis trajetórias das linhas de impulso e torção na base da abóbada. Dimensões em metros.

Na figura 8,  $E_{min}$  = Empuxo mínimo,  $E_{int}$  = Empuxo intermediário,  $E_{max}$  = Empuxo máximo,  $r_1$ - $r_2$ : pontos de rotação. Nós (a)-(f): interseções entre a linha vertical que passa pelo centróide do subsistema arco de terra compactada e os empuxos vetoriais. Nós (A)-(F): interseções entre a linha vertical que passa pelo centróide do subsistema arco não aterrado e os impulsos vetoriais. CA e CAT: centros de gravidade dos subsistemas em arco sem terra e terra compactada, respectivamente. Teoria retirada de (Barlow, William Henry 1846; Meli, R. 1998).

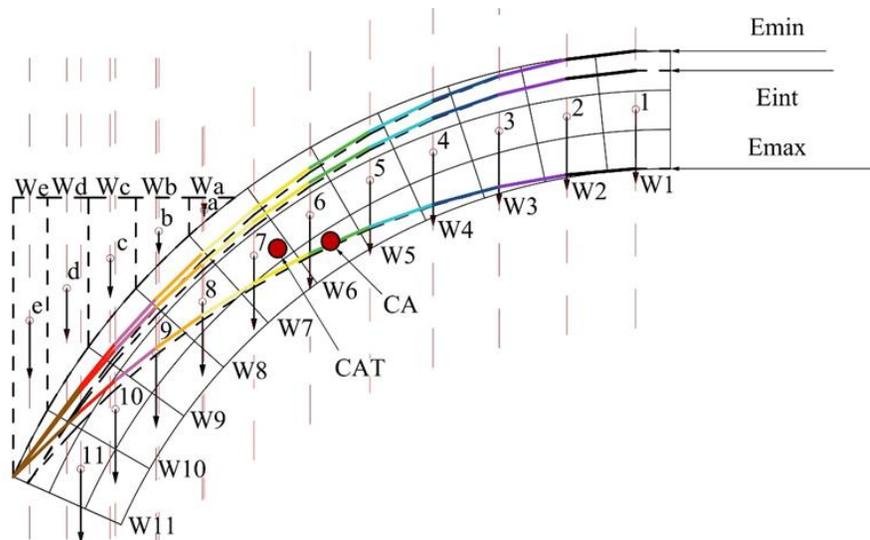


Figura 9. Localização das linhas de impulso quando o subsistema em arco tende a girar em relação ao ponto “r1”. Vale ressaltar que foi escolhido o ponto de rotação “r1”, pois é assim que o objeto real se comporta (ver figura 4c).

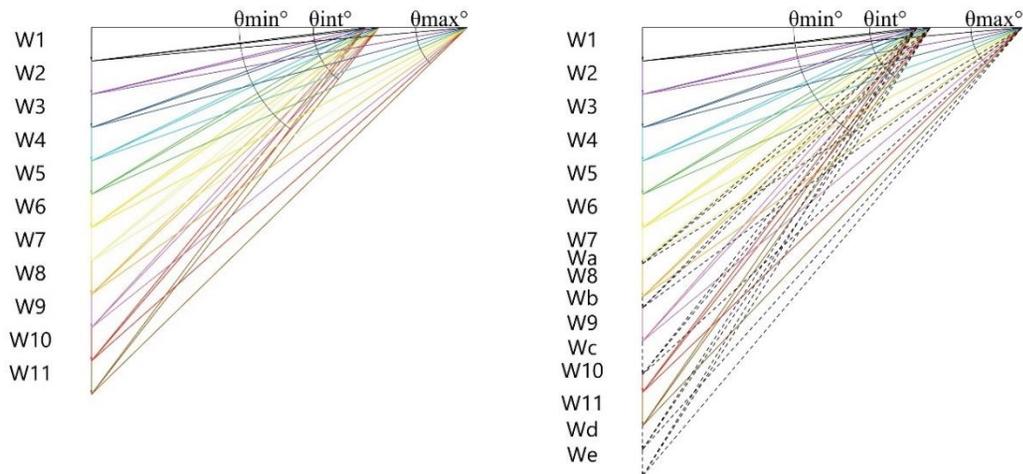


Figura 9.1. Representação de linhas de impulso. As linhas sólidas representam o impulso das aduelas e as linhas pontilhadas representam o impulso da terra comprimida acima do arco. Ambas as figuras expressam as magnitudes em  $E_{max}$ ,  $E_{int}$  e  $E_{min}$  (ver figura 9).

Tabela 2. Magnitudes e ângulos dos vetores no subsistema arco sem terra.

Subsistema de arco sem solo									
Elemento	$E_{máx}$			$E_{int}$			$E_{min}$		
	$Vr_i$ (Kg)		$\theta^{°máx.}$	$Vr_i$ (Kg)		$\theta^{°int}$	$Vr_i$ (Kg)		$\theta^{°min}$
	Fr1	Fr2		Fr1	Fr2		Fr1	Fr2	
EL	3.248,85	9.024,58	0	2.464,03	6.844,53	0	2.350,48	6.529,11	0
1	3.261,63	9.060,08	5,07	2.480,85	6.891,25	6,68	2.368,11	6.578,08	7
2	3.299,67	9.165,75	10,07	2.530,66	7.029,61	13,18	2.420,24	6.722,89	13,79
3	3.362,11	9.339,19	14,91	2.611,55	7.254,31	19h35	2.504,70	6.957,50	20,21
4	3.447,63	9.576,75	19h55	2.720,77	7.557,69	25,09	2.618,38	7.273,28	26h15
5	3.554,57	9.873,81	23,94	2.855,06	7.930,72	30h34	2.757,66	7.660,17	31,53
6	3.681,05	10.225,14	28,04	3.011,07	8.364,08	35,08	2.918,88	8.108,00	36,36
7	3.825,14	10.625,39	31,86	3.185,61	8.848,92	39,33	3.098,62	8.607,28	40,63
8	3.984,93	11.069,25	35,39	3.375,81	9.377,25	43,12	3.293,85	9.149,58	44,47
9	4.158,61	11.551,69	38,63	3.579,17	9.942,14	46,49	3.501,97	9.727,69	47,84
10	4.344,52	12.068,11	41,60	3.793,58	10.537,72	49,49	3.720,83	10.335,64	50,82
11	4541,14	12.614,28	44,32	4.017,26	11.159,06	52,17	3.948,64	10.968,44	53,47

Onde:  $E_{max}$ = Empuxo máximo,  $E_{int}$ = Empuxo intermediário,  $E_{min}$ = Empuxo mínimo,  $Vr_i$ = Vetor de empuxo pertencente ao elemento “i” (representado com magnitude),  $i=1$  a  $n$ ,  $n$ = Elementos discretizados,  $E_h$ = Empuxo horizontal,  $\theta$  = Ângulo em graus. Fr1 e Fr2 são subsistemas estruturais com espessuras de 0,90m e 2,50m, respectivamente.

Tabela 3. Valores numérico-vetoriais das propriedades físico-geométricas dos subsistemas Fr1 e Fr2, ordenados sucessivamente para a análise vetorial.

EL <sub>i</sub>	x <sub>i</sub> (m)	y <sub>i</sub> (m)	A <sub>i</sub> (m <sup>2</sup> )	V <sub>i</sub> (m <sup>3</sup> )		W <sub>i</sub> (kg)		$\vec{W}_i$ (cm)	
				Fr1	Fr2	Fr1	Fr2		
1	0,1547	0,2397	0,1187	0,1068	0,2968	288,44	801,23	28,84	80,12
2	0,1756	0,2496							
3	0,1945	0,2568							
4	0,2114	0,2612							
5	0,2259	0,2627							
6	0,2379	0,2614							
7	0,2473	0,2572							
a	0,0573	0,0969	0,0122	0,0110	0,0306	17,61	48,91	1,76	4,89
8	0,2541	0,2501	0,1187	0,1068	0,2968	288,44	801,23	28,84	80,12
b	0,0874	0,2192	0,0492	0,0443	0,1230	70,87	196,87	7,09	19,69
9	0,2580	0,2402	0,1187	0,1068	0,2968	288,44	801,23	28,84	80,12
10	0,2591	0,2280							
c	0,0830	0,3386	0,0822	0,0740	0,2056	118,44	328,99	11,84	32,90
11	0,2574	0,2139	0,1187	0,1068	0,2968	288,44	801,23	28,84	80,12
d	0,0736	0,4648	0,1074	0,0966	0,2684	154,62	429,50	15,46	42,95
e	0,0622	0,5975	0,1218	0,1096	0,3044	175,35	487,08	17,53	48,71
12	0,4188	0,3036	0,5147	0,4633	1,2868	1250,79	3474,42	125,08	347,44
13	0,4000	1,6000	2,5600	2,3040	6,4000	6220,80	17.280,01	622,08	1728,00
14	0,5250	0,3500	0,7350	0,6615	1,8375	1786,05	4961,25	178,61	496,13
15	0,6375	0,1000	0,2550	0,2295	0,6375	367,20	1.020,00	36,72	102,00
f	0,2667	0,4149	0,4268	0,2024	0,6072	323,82	971,45	32,38	97,14
16	0,2667	0,5337	0,5694	0,5124	1,4235	1383,61	3843,36	138,36	384,34

Onde: EL= Elemento discretizado, A = Área do plano centroidal, i =1 a n, n= número de elementos discretizados, V= Volume, W= Carga gravitacional,  $\vec{W}$  = Magnitude do vetor que representa a carga gravitacional. Fr1 e Fr2 são subsistemas estruturais com espessuras de 0,90m e 2,50m, respectivamente.

As linhas sombreadas representam os elementos discretos de terra localizados acima da abóbada (ver figura 9). Os valores referidos à letra “f” representam os elementos “pináculo”, onde os casos Fr1 e Fr2 possuem um e três pináculos, respectivamente (ver figura 10). A Figura 10 e a Tabela 4 apresentam a análise e resultados dos subsistemas simétricos (com parede e fundação) para os casos com e sem terra no topo da abóbada, e com e sem pináculos.

Tabela 4. Magnitudes e ângulos de empuxo por elemento no sistema simétrico com parede e fundação para as doze trajetórias possíveis da linha de empuxo apresentadas na figura 10.

Subsistema simétrico com e sem terra acima do arco									
Elemento	E <sub>max</sub>			E <sub>int</sub>			E <sub>min</sub>		
	V <sub>r</sub> (Kg)		θ° <sub>max</sub>	V <sub>r</sub> (Kg)		θ° <sub>int</sub>	V <sub>r</sub> (Kg)		θ° <sub>min</sub>
	Fr <sub>1</sub>	Fr <sub>2</sub>		Fr <sub>1</sub>	Fr <sub>2</sub>		Fr <sub>1</sub>	Fr <sub>2</sub>	
EH	3.135,70	8.710,28	0	2.378,21	6.606,14	0	2.268,62	6.301,72	0
1	3.148,94	8.747,06	5,26	2.395,64	6.654,56	6,92	2.286,88	6.352,44	7,25
2	3.188,33	8.856,47	10,42	2.447,18	6.797,72	13,64	2.340,82	6.502,28	14,27
3	3.252,91	9.035,86	15,43	2.530,75	7.029,86	19,99	2.428,05	6.744,58	20,88
4	3.341,23	9.281,19	20,20	2.643,31	7.342,53	25,88	2.545,15	7.069,86	26,96
5	3.451,46	9.587,39	24,70	2.781,34	7.725,94	31,23	2.688,23	7.467,31	32,44
6	3.581,59	9.948,86	28,90	2.941,26	8.170,17	36,04	2.853,38	7.926,06	37,34
7	3.729,52	10.359,78	32,78	3.119,71	8.665,86	40,33	3.037,00	8.436,11	41,67
a	3.739,09	10.386,36	33,00	3.131,14	8.697,61	40,58	3.048,73	8.468,69	41,92
8	3.903,70	10.843,61	36,56	3.325,98	9.238,83	44,35	3.248,52	9.023,67	45,70
b	3.946,33	10.962,03	37,38	3.375,91	9.377,53	45,21	3.299,62	9.165,61	46,56
9	4.127,82	11.466,17	40,57	3.586,39	9.962,19	48,46	3.514,67	9.762,97	49,80
c	4.205,81	11.682,81	41,79	3.675,88	10.210,78	49,69	3.605,94	10.016,50	51,01
10	4.403,29	12.231,36	44,59	3.900,28	10.834,11	52,43	3.834,44	10.651,22	53,73
11	4.610,37	12.806,58	47,15	4.132,64	11.479,56	54,87	4.070,56	11.307,11	56,13
d	4.724,89	13.124,69	48,42	4.260,03	11.833,42	56,06	4.199,83	11.666,19	57,30
e	4.857,45	13.492,92	49,79	4.406,59	12.240,53	57,34	4.348,43	12.078,97	58,55
12	5.865,52	16.293,11	57,68	5.501,16	15.281,00	64,39	5.454,68	15.151,89	65,42
13	11.612,70	32.257,50	74,33	11.431,45	31.754,03	77,99	11.409,15	31.692,08	78,53
14	13.341,12	37.058,67	76,41	13.183,66	36.621,28	79,61	13.164,33	36.567,58	80,08
15	13.698,31	38.050,86	76,77	13.545,00	37.625,00	79,89	13.526,19	37.572,75	80,34
f	14.013,73	-	77,07	13.863,90	-	80,12	13.845,52	-	80,57
f	-	40.682,39	77,64	-	40.284,36	80,56	-	40.235,56	80,99
16	15.365,37	-	78,22	15.228,85	-	81,02	15.212,12	-	81,42
16	-	44.444,25	78,70	-	44.080,19	81,38	-	44.035,61	81,77

Onde: E<sub>max</sub>= Empuxo máximo, E<sub>int</sub>= Empuxo intermediário, E<sub>min</sub>= Empuxo mínimo, V<sub>r</sub>= Vetor de empuxo pertencente ao elemento “i” (representado com magnitude), i=1 a n, n= Elementos discretizados, E<sub>h</sub>= Empuxo horizontal, θ = Ângulo em graus. Fr<sub>1</sub> e Fr<sub>2</sub> são subsistemas estruturais com espessuras de 0,90m e 2,50m, respectivamente.

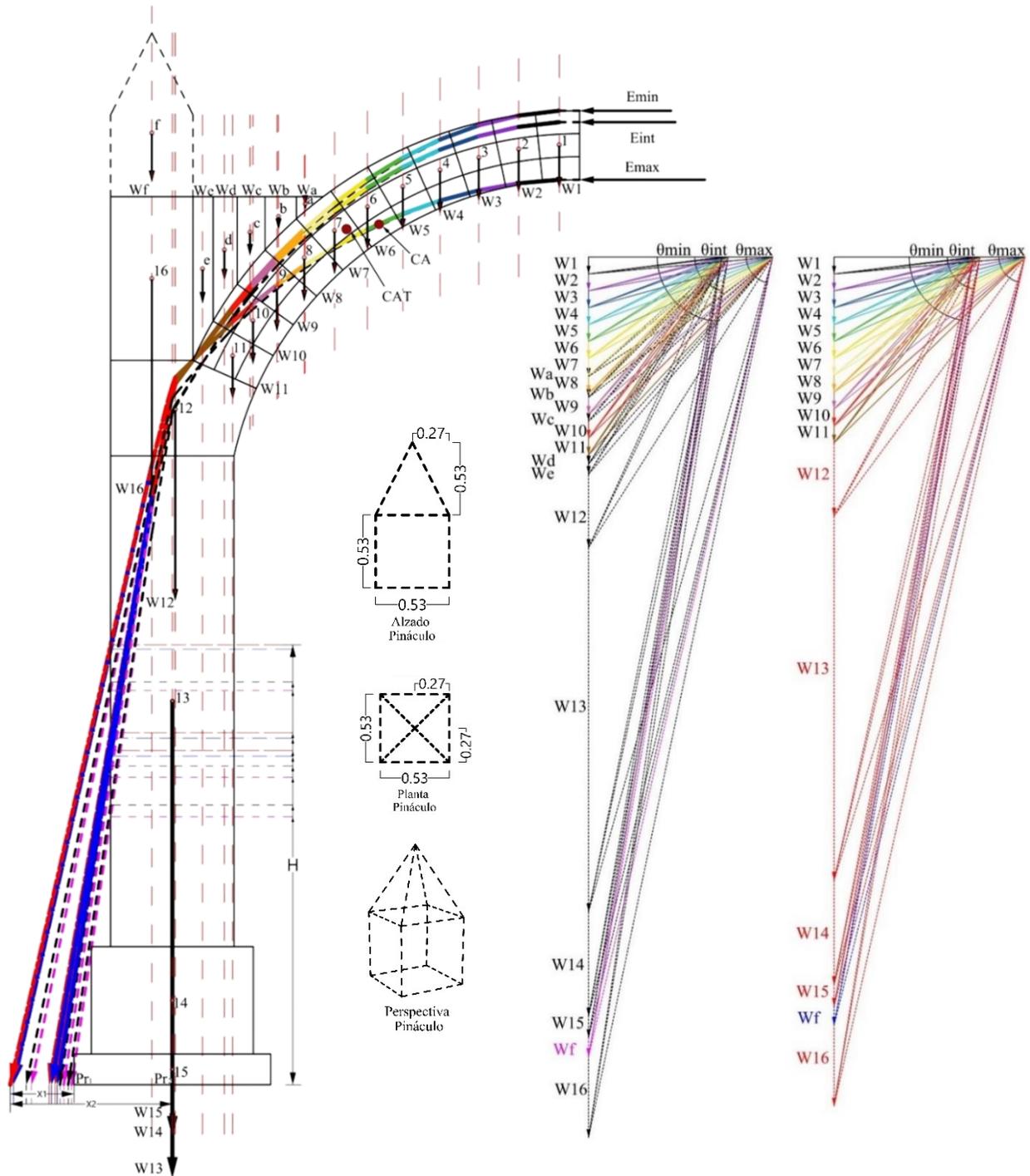


Figura 10. Análise vetorial dos subsistemas simétricos, onde podem ser observadas as magnitudes e direções dos empuxos gerados por todos os elementos, com e sem as cargas de solo e de pináculo.

Na Figura 10, os vetores que representam as cargas W13, W14 e W15 foram desenhados na metade do comprimento e duplicados em espessura para que ainda tenham uma magnitude graficamente representativa. Esta figura mostra apenas a análise vetorial para  $Fr_1$  e as dimensões estão em metros. Nota: A linha preta pontilhada sem seta representa o empuxo calculado com um peso volumétrico da alvenaria de  $1627 \text{ kg/m}^3$ , que sai da geometria.

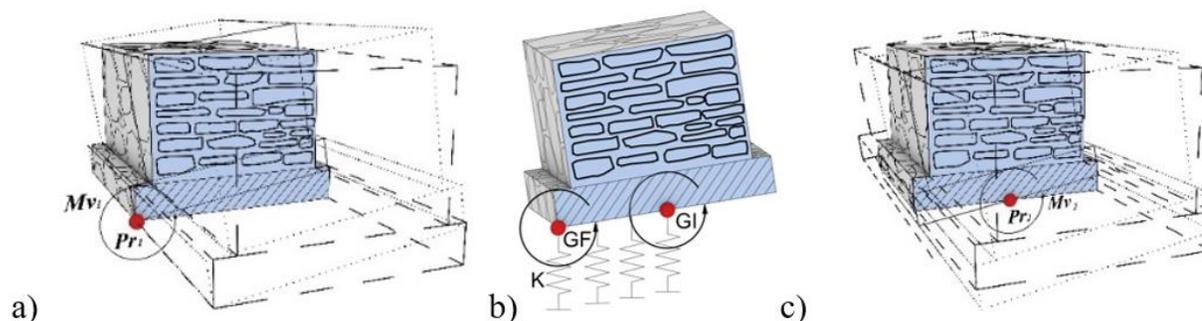


Figura 11. Momentos de tombamento de acordo com o comportamento da fundação em diferentes tipos de solo. a) fundação colocada em solo não compressível, b) fundação colocada em solo moderadamente compressível, c) fundação colocada em solo altamente compressível.

A Figura 11 mostra os possíveis momentos de tombamento da fundação. A Tabela 5 mostra as magnitudes e relações dos momentos atuantes ( $M_v$ ) e resistentes ( $M_r$ ) de tombamento de acordo com os vetores resultantes para os diferentes subsistemas (ver figura 10).  $M_v$  = Momento de tombamento,  $G_I$  = Rotação inicial,  $G_F$  = Rotação final,  $K$  = Rigidez vertical do solo. Teoria retirada de (Meli, R. 2011) e adaptada pelo autor.

Por outro lado, também foram desenvolvidas análises digitais por meio de software (Computers and Structures, Inc. 2023), baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF). As Figuras 12 a 17 apresentam as simulações do comportamento estrutural da faixa Fr1, que considera a estrutura contínua e descontínua. Nos modelos descontínuos, as separações de elementos finitos foram simuladas nas áreas fissuradas da abóbada do objeto real. Nos modelos contínuos não foram simuladas tais separações. Para a modelagem foram levados em consideração elementos do tipo casca plana e elementos do tipo sólido 3D. Segundo (Circolare, 2019), o módulo de elasticidade ( $E$ ), para todos os modelos, foi assumido como  $7.036 \text{ kg/cm}^2$ . Módulo de Poisson de 0,17. A densidade dos materiais foi considerada a mesma das análises gráficas.

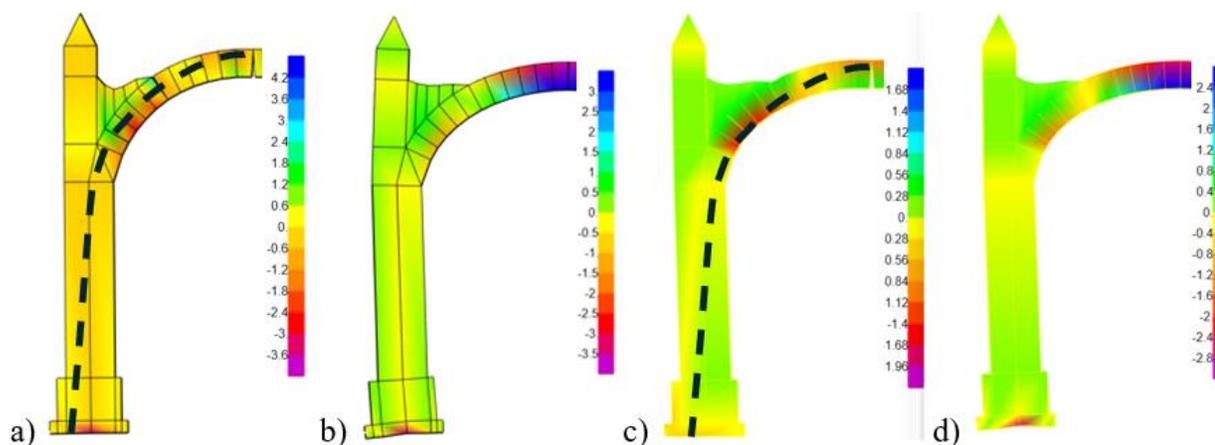


Figura 12. Tensões em  $\text{kg/cm}^2$  e comportamento das deformações em meia simétrica com pináculos, com enchimento de terra na abóbada e com rotação livre no centro da fundação. Casos: a) descontínuo com “shell”. b) contínuo com “shell”. c) descontínuo com sólidos. d) contínuo com sólidos.

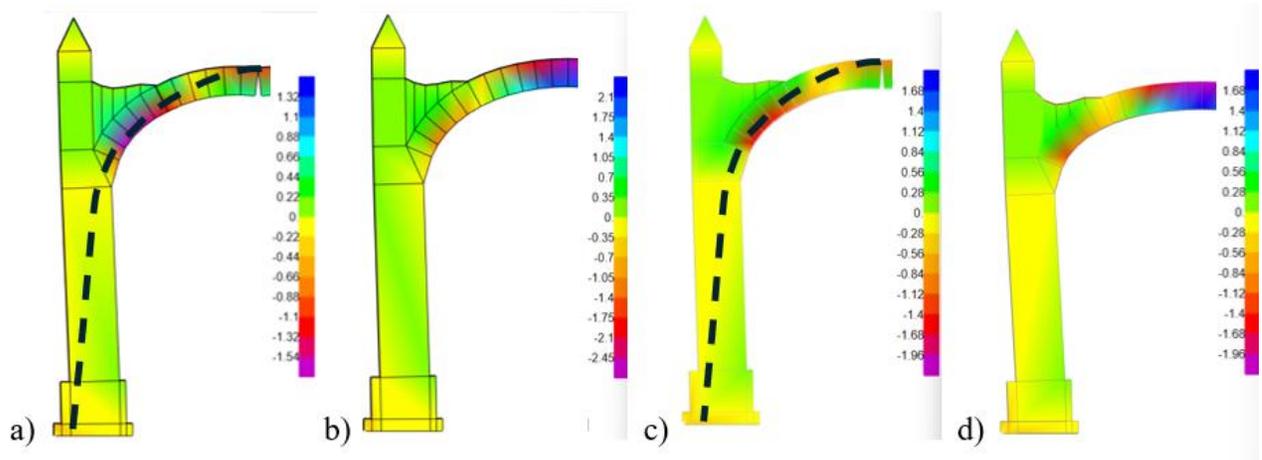


Figura 13. Tensões em  $\text{kg}/\text{cm}^2$  e comportamento das deformações em meia simétrica com pináculos, com enchimento de terra na abóbada e com apoio total da fundação. Casos: a) descontínuo com “shell”. b) contínuo com “shell”. c) descontínuo com sólidos. d) contínuo com sólidos.

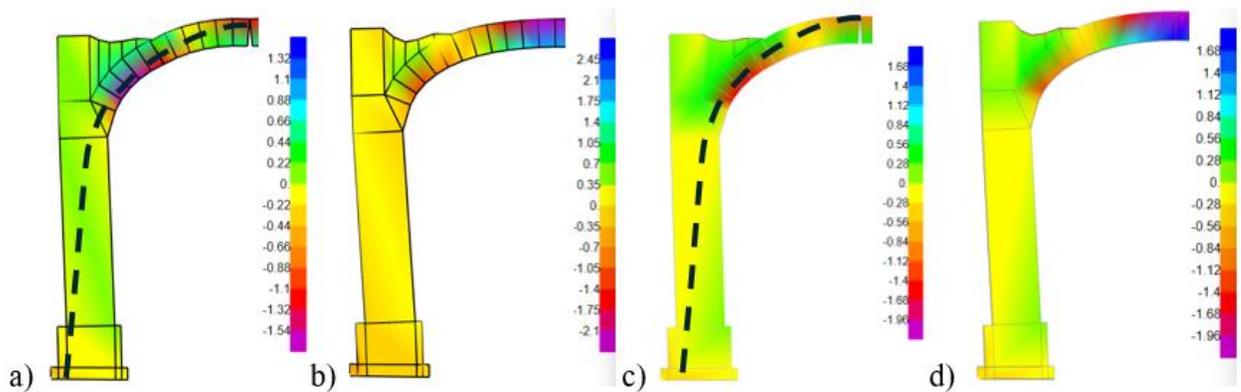


Figura 14. Tensões em  $\text{kg}/\text{cm}^2$  e comportamento das deformações em meio simétrico sem pináculos, com enchimento de terra na abóbada e rotação livre no centro da fundação. Casos: a) descontínuo com “shell”. b) contínuo com “shell”. c) descontínuo com sólidos. d) contínuo com sólidos.

Os modelos de faixas Fr1 mostrados nas Figuras 15a e 15b representam períodos de vibração na direção paralela ao plano de  $T=0,1$  s e  $T=0,51$  s respectivamente, ambos os casos foram desenvolvidos com a base de fundação simplesmente apoiada.

Como pode ser observado nas figuras 13 a 16, as linhas de compressão não saem da geometria das estruturas, uma vez que estes modelos de elementos finitos tendem a desenvolver um equilíbrio entre tensão e compressão em materiais elásticos contínuos.

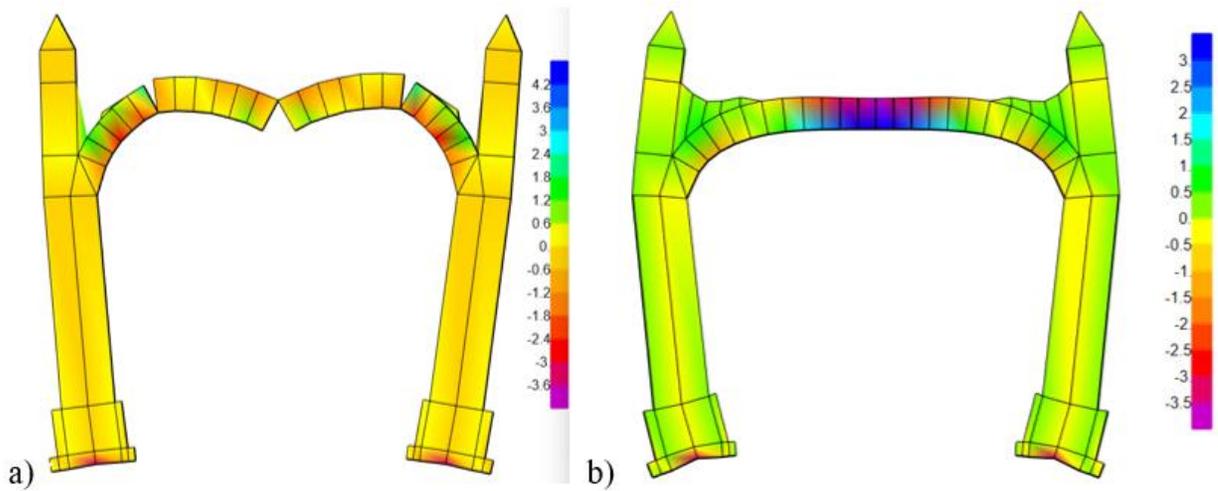


Figura 15. Simulação virtual do comportamento estrutural da faixa completa Fr1 utilizando elementos finitos. a) Faixa Fr1 modelada com elementos descontínuos do tipo “shell” de acordo com os problemas apresentados pelo objeto real. b) Faixa Fr1 modelada com elementos contínuos do tipo “shell”. Ambos os modelos permitem rotação na fundação.

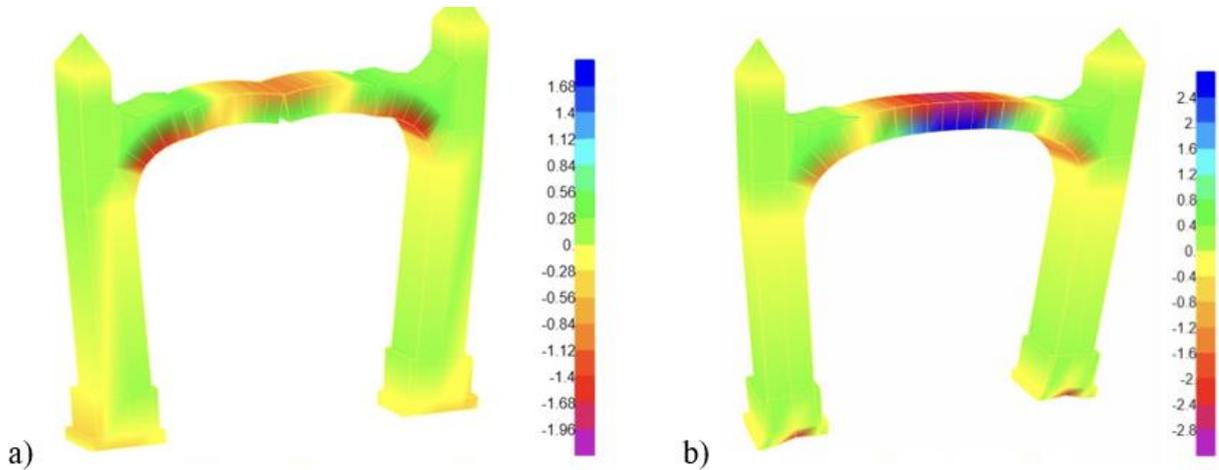


Figura 16. Simulação virtual do comportamento estrutural da faixa completa Fr1 utilizando elementos finitos. a) Faixa Fr1 modelada com elementos descontínuos do tipo sólido de acordo com os problemas apresentados pelo objeto real. b) Faixa Fr1 modelada com elementos contínuos do tipo sólido.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A aplicação de equações matemáticas e seu processamento computacional diminuiu o tempo de traçados gráficos, visto que em uma mesma faixa sistematizada foram desenvolvidos doze casos diferentes de comportamento estrutural e os resultados foram mais exatos, dada a precisão exigida pela análise vetorial. O processo de análise de edifícios históricos em alvenaria com arcos e sistemas simétricos apresentado neste trabalho pode ser aplicado na pesquisa e na prática profissional de forma rápida e precisa, para encontrar as cargas necessárias e manter o equilíbrio estático estrutural. O processo matemático para determinar as áreas das aduelas baseia-se em arcos totalmente curvos. Caso seja necessário analisar arcos com segmentos retos, estas equações matemáticas devem ser alteradas.

Tabela 5. Resultados das diferentes linhas de impulso nos subsistemas simétricos com parede e fundação para as doze configurações possíveis analisadas para Fr1.

ELEMENTO			Vuri (kg)	Py (Kg)	H (m)	X1 (m)	X2 (m)	$\theta^\circ$	Mv1 (kg-m)	Mr/ Mv1 (%)	Mv2 (kg-m)	Mr/ Mv2 (%)
Emin	c/t	c/p	15.212,12	14.916,55	2,57	0,28	0,92	78,69	4.176,63	200	13.723,23	61
		s/p	14.892,00	14.578,04	2,63	0,31	0,95	78,21	4.519,19	184	13.849,13	60
	s/t	c/p	14.697,62	14.347,17	2,84	0,29	0,93	77,46	4.160,68	200	13.342,87	62
		s/p	14.378,13	14.020,16	2,87	0,41	1,05	77,19	5.748,26	145	14.721,16	57
Eint	c/t	c/p	15.228,85	15.056,43	2,01	0,07	0,71	81,37	1.053,95	791	10.690,06	78
		s/p	14.909,09	14.725,74	2,08	0,09	0,73	81,01	1.325,32	629	10.749,79	78
	s/t	c/p	14.716,36	14.508,00	2,26	0,15	0,79	80,35	2.176,20	383	11.461,32	73
		s/p	14.397,29	14.184,28	2,29	0,16	0,80	80,13	2.269,49	367	11.347,43	73
Emax	c/t	c/p	15.365,37	15.206,82	1,75	0,02	0,66	81,76	304,14	2740	10.036,50	83
		s/p	15.048,51	14.879,78	1,82	0,04	0,68	81,41	595,19	1400	10.118,25	82
	s/t	c/p	14.864,51	14.672,47	2,14	0,11	0,75	80,78	1.613,97	516	11.004,35	76
		s/p	14.570,44	14.373,71	2,18	0,12	0,76	80,57	1.724,85	483	10.924,02	76

Onde: Py= Componente vertical do último vetor (Vuri), H= Altura medida desde a superfície de contato da fundação com o solo até a intersecção do último vetor (Vuri) com a linha perimetral (borda) da parede (Elemento 13 para este objeto de estudo), = sem terra, s/p= sem pináculos, c/t= com terra, c/p= com pináculos. Esta tabela apresenta apenas os resultados do subsistema Fr1, pois são proporcionais dependendo da largura das faixas.

Ao comparar os resultados da análise gráfica com os obtidos nas análises de elementos finitos, observa-se que o comportamento estrutural tende a ser semelhante, mas com algumas particularidades, as paredes tendem a virar para fora e a abóbada é propensa a rebaixar, onde o topo da tecla se move para baixo devido aos efeitos gravitacionais. Nos elementos modelados como descontínuos, o intradorso da chave tende a ser tensionado e como a alvenaria tem muito pouca resistência à tração, praticamente nula, mesmo sendo aduelas, essa área se abre causando uma torção na área ou ponto de contato superior e gera, portanto, o que nos métodos gráficos é chamado de empuxo horizontal mínimo (Emin). Os resultados que mais se assemelham ao método gráfico são os modelos com elementos do tipo (shell) onde a descontinuidade é considerada tal como aparece no objeto real. Por exemplo: ao comparar as forças calculadas com o método gráfico estático no caso em que foram consideradas descontinuidades, carga de terra acima da abóbada e pináculo, obteve-se um empuxo horizontal mínimo de 2.268,62 kg (ver tabela 4), e no mesmo caso modelado com elementos finitos, obteve-se um esforço na mesma área de 0,33 kg/cm<sup>2</sup>, portanto,

quando convertido em força, obtém-se um empuxo horizontal de 2.970 kg (ver figura 12a), portanto, o Emin calculado com gráfico Os métodos, para este caso específico, tiveram uma diferença de magnitude 24% menor que a calculada com elementos finitos, isso se deve à redistribuição dos elementos mecânicos e das forças, devido à continuidade dos sistemas baseados em elementos do tipo casca ou sólidos. Por outro lado, para determinar a linha de empuxo nos modelos de elementos finitos, cada delta de superfície de cada elemento de casca modelado foi selecionado para encontrar a compressão que representa a linha de empuxo para representá-la graficamente.

## 6. CONCLUSÕES

Em sistemas estruturais homogêneos, isotrópicos, infinitamente resistentes e sem deslizamento entre elementos, apenas a metade simétrica pode ser modelada. A seleção dos pontos de rotação do subsistema arco está condicionada pela configuração que a estrutura tem, teve ou terá. Quanto mais divisões virtuais ou reais o sistema tiver, maior será a precisão na determinação e formação das dobradiças e, portanto, maior será a certeza na obtenção da posição da linha de impulso.

O tipo de solo contribui para o comportamento da superestrutura, uma vez que podem ser gerados efeitos de segunda ordem (P-Delta), devido ao possível tombamento das fundações. A contribuição das cargas dos pináculos no topo das paredes e da terra no topo da abóbada traduz-se numa maior estabilidade face aos efeitos de tombamento em paredes e fundações, nomeadamente a presença da carga do solo desloca o empuxo linha mais próxima do terço central geométrico de segurança no subsistema arco. A integração dos pináculos e do solo aumentou consideravelmente a relação Momento de Resistência/Momento de Capotamento.

Ao comparar as linhas de empuxo-compressão dos modelos gráficos e de elementos finitos, fica evidente que existem algumas diferenças, uma vez que os elementos finitos utilizados nestas análises possuem continuidade na maioria dos modelos, pois a maioria deles são contínuos e apresentam tração. Conclui-se que estes métodos fornecem resultados muito particulares e alguns deles são semelhantes, por isso recomenda-se utilizar os métodos como complemento e não classificar um em detrimento do outro. Finalmente, é importante estudar este tipo de estruturas com análise de elementos de contacto.

## 7. AGRADECIMENTOS

Agradecimentos a Jorge Fernando Zárate Martínez pelo apoio na correção final em inglês. Obrigado também a Elizabeth Amador por facilitar o acesso ao edifício. À Unidad Académica Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Tecamachalco (ESIA UT) do Instituto Politécnico Nacional (IPN), México.

## 8. REFERÊNCIAS

- Angelillo M., et al., (2014), "*Mechanics of Masonry Structures*", Editado por Maurizio Angelillo. Springer. Università di Salerno, Fisciano, Italy.
- Biblioteca Tomás Navarro Tomás, (19/10/2023), "*Escuela de Santa Catarina, Atotonilco El Grande en Hidalgo (México)*", <https://www.pinterest.com.mx/pin/334533078561349371/>
- Barlow, William Henry (1846). "*On the Existence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction*", Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 5, pp. 179-180.
- Block, P., DeJong, M., Ochsendorf, J. A. (2006), "*As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*". Nexus Network Journal - Vol 8, No. 2. <https://doi.org/10.1007/s00004-006->

[0015-9.](#)

Chávez, Mauricio M., (2010), “*Validación Experimental De Modelos Analíticos Para El Estudio Del Comportamiento Sísmico De Estructuras Históricas*”, México, UNAM, p. 24.  
Chávez, M. (2005), “*Estudio experimental de las propiedades mecánicas de mamposterías de piedra natural*”, publicado por el Instituto de ingeniería UNAM. Ciudad Universitaria, CP 04510, Ciudad de México.

Chávez, M. (2010), “*Validación experimental de modelos analíticos para el estudio del comportamiento sísmico de estructuras históricas*”, publicado por el Instituto de Ingeniería UNAM. Ciudad Universitaria, CP 04510, Ciudad de México.

Circolare, (2019), Código italiano DM 14.1. Il Ministro: Toninelli

Durán, D., Chávez m. M. (2022), “*Mechanical properties of masonry stone samples extracted from Mexican colonial churches*”, Elsevier, coordinación de ingeniería estructural, instituto de ingeniería, universidad nacional autónoma de México, México, E01295, <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e01295>

Goodno, B. J., Gere, J. M., (2013), “*Mechanics of Materials (Ninth Edition)*”, Cengage Learning, U.S., pp. 26-27.

Mas-Guindal, A. J. (2021). “*Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban*”. Munilla-Lería, España-Madrid.

Heyman, J. (1969), “*Teoría, Historia Y Restauración De Estructuras De Fábrica*”, Inst. Juan de Herrera, México, pp. 1-1

Heyman, J. (1995), “*The Stone Skeleton Structural engineering of masonry architecture (First Publish)*”, Cambridge University Press, United Kingdom, pp. 5-49.

Hibbeler, R.C. (2016), “*Ingeniería mecánica estática (decimosegunda edición)*”, Prentice Hall, Pearson Educación, México, pp. 447-456, 599.

Huerta, S. (2004), “*Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*”, Inst. Juan de Herrera, Madrid, pp. 11-34.

Huerta, S. (2006). “*Galileo was wrong: The Geometrical Design of Masonry Arches*”, E.T.S. de Arquitectura Universidad Politécnica de Madrid, Inst. Juan de Herrera, Nexus Network Journal 8 (2006), p. 26.

ICOMOS Internacional Council of Monument and Cities. (2003). “*Principles for the analysis, conservation, and restoration of architectural heritage structures*”. Victoria Falls, Zambia. Retrieved from <http://www.icomos.org>

ISCARSAH. (2003). “*Recommendations for the analysis conservation, and structural restoration of architectural heritage*”. Course on Architectural Heritage Intervention of the College of Architects of Catalonia. Catalonia: ICOMOS.

Markou, A. A., Ruan, G. (2022), “*Graphic statics: projective funicular polygon*”, ELSEVIER, Department of Civil Engineering, Aalto University, Rakentajanaukio 4A, Espoo FI-00076, Finland, pp. 1394-1395.

Mas-Guindal, A. J. (2021). “*Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban*”. Munilla-Lería, España-Madrid, pp. 34-73.

Mc Cormac, J. C., Brown, R. H. (2017), “*Diseño de Concreto Reforzado (décima edición)*”, Alfaomega Grupo Editor, México, p. 355.

Meli, R. (1998), “*Ingeniería estructural de los edificios históricos*”, ICA, México, p. 10

Meli, R. (2011), “*Diseño Estructural (segunda edición)*”, Limusa Noriega Editores, México, p. p. 544, 552.

Minke, G. (1994), “*Manual de construcción en tierra, La tierra como material de construcción y su aplicación en la arquitectura actual*”, Editorial Fin de Siglo, Alemania, p. 25.

Popov, E. P., Toader, A. B. (1999),” *Mecánica de Sólidos (Segunda Edición) Prentice Hall*”, Pearson Educación, México, p. 4.

Computers and Structures, Inc. (2023), “*SAP2000: Integrated Software for Structural Analysis and Design*” (Version 23.1.0).

Segovia, M. A. (2022), “*Análisis constructivo - estructural para determinar el comportamiento de un inmueble de mampostería del siglo XVI, Santa Catarina, Atotonilco del grande*”, Tesis del IPN, México, pp. 49, 77.

Spiegel, M. R. (1970), “*Análisis vectorial, Teoría y 480 Problemas Resueltos*”, Serie SCHAUM, U.S.A., pp. 1-4