

Sucesión numérico-vectorial para el análisis estructural gráfico de edificios históricos de mampostería con arcos y sistemas simétricos

C. Torres^{1*} , J. Rosas² , O. Pérez² 

*Autor de Contacto: ktcate2@hotmail.com; ctorresmo@ipn.mx

DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v14i2.717>

Recibido: 22/12/2023 | Correcciones recibidas: 10/05/2024 | Aceptado: 14/05/2024 | Publicado: 15/05/2024

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es denotar la aplicación de la sucesión numérico-vectorial en el análisis estructural de edificios históricos de mampostería, con arcos y sistemas simétricos, incluyendo procesos matemáticos en el análisis gráfico antiguo, enfatizando la importancia de las cargas en la estabilidad estructural. Los análisis se basan en tres etapas fundamentales: reconocimiento del sistema constructivo del objeto patrimonial, discretización geométrica del sistema y análisis vectorial bajo diferentes consideraciones físicas. Así, las líneas de empuje se ven afectadas por las cargas, las condiciones de contorno y la historia del comportamiento estructural del objeto patrimonial. Las herramientas numéricas y computacionales ofrecen procesos de análisis gráfico más rápidos y precisos. Se concluye que estos métodos proporcionan resultados muy particulares y algunos de ellos son similares, por lo que se recomienda utilizar los métodos como complemento y no catalogar uno sobre el otro.

Palabras clave: Análisis estructural; edificios históricos; análisis vectorial; arcos de mampostería; método gráfico.

Citar como: Torres, C., Rosas, J., Pérez, O. (2024), “*Sucesión numérico-vectorial para el análisis estructural gráfico de edificios históricos de mampostería con arcos y sistemas simétricos*”, Revista ALCONPAT, 14 (2), pp. 191 – 210, DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v14i2.717>

¹ Research professor at Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI), Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Tecamachalco (ESIA UT), Instituto Politécnico Nacional (IPN), 53950, Naucalpan de Juárez, Estado de México, México, <http://www.sepi.esiatec.ipn.mx>.

² Bachelor's student at Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Tecamachalco (ESIA UT), Instituto Politécnico Nacional (IPN), 53950, Naucalpan de Juárez, Estado de México, México, <http://www.esiatec.ipn.mx>.

Contribución de cada autor

En este trabajo, el autor 1 contribuyó con el 100% de la idea original, dirección y escritura final, el autor 2 contribuyó con el 60% del escrito inicial del documento y con el 70% del dibujo de figuras y discusión de resultados, el autor 3 contribuyó con el 40% del escrito inicial y recolección de datos.

Licencia Creative Commons

Los derechos de autor (2022) son propiedad de los autores. Este trabajo es un artículo de acceso abierto publicado bajo los términos y condiciones de una licencia internacional Creative Commons Attribution 4.0 International License ([CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)).

Discusiones y correcciones posteriores a la publicación

Cualquier discusión, incluyendo la réplica de los autores, se publicará en el primer número del año 2025 siempre y cuando la información se reciba antes del cierre del tercer número del año 2024.

Numerical-vector succession for the graphical structural analysis of historic masonry buildings with arches and symmetrical systems.

ABSTRACT

The objective of this research is to denote the application of numerical-vector succession in the structural analysis of historical masonry buildings, with arches and symmetrical systems, including mathematical processes in ancient graphic analysis, emphasizing the importance of loads in the structural stability. We based the analysis on three fundamental stages: recognition of the construction system of the heritage object, geometric discretization of the system and vector analysis under different physical considerations. Hence, the thrust lines are affected by the loads, boundary conditions and history of structural behaviour. Numerical and computational tools offer faster and more accurate graphic analysis processes. It is concluded that these methods provide very particular results and some of them are similar, therefore, it is recommended to use the methods as a complement and not to catalogue one over the other.

Keywords: structural analysis; historic buildings; vector analysis; masonry arches; graphic method.

Sequência vetorial-numérica para a análise estrutural gráfica de edifícios históricos de alvenaria com arcos e sistemas simétricos.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é denotar a aplicação da sucessão numérico-vetorial na análise estrutural de edifícios históricos de alvenaria, com arcos e sistemas simétricos, incluindo processos matemáticos na análise gráfica antiga, enfatizando a importância das cargas na estabilidade estrutural. Baseamos a análise em três etapas fundamentais: reconhecimento do sistema construtivo do objeto patrimonial, discretização geométrica do sistema e análise vetorial sob diferentes considerações físicas. Assim, as linhas de impulso são afetadas pelas cargas, pelas condições de fronteira e pela história do comportamento estrutural. As ferramentas numéricas e computacionais oferecem processos de análise gráfica mais rápidos e precisos. Conclui-se que estes métodos fornecem resultados muito particulares e alguns deles são semelhantes, por isso recomenda-se utilizar os métodos como complemento e não classificar um sobre o outro.

Palavras-chave: análise estrutural; edifícios históricos; análise vetorial; arcos de alvenaria; método gráfico.

Información Legal

Revista ALCONPAT es una publicación cuatrimestral de la Asociación Latinoamericana de Control de Calidad, Patología y Recuperación de la Construcción, Internacional, A. C., Km. 6, antigua carretera a Progreso, Mérida, Yucatán, C.P. 97310, Tel.5219997385893, alconpat.int@gmail.com, Página Web: www.alconpat.org

Reserva de derechos al uso exclusivo No.04-2013-011717330300-203, eISSN 2007-6835, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derecho de Autor. Editor responsable: Dr. Pedro Castro Borges. Responsable de la última actualización de este número, Unidad de Informática ALCONPAT, Ing. Elizabeth Sabido Maldonado.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor.

La reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación se realiza en apego al código COPE y a la licencia CC BY 4.0 de la Revista ALCONPAT.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis estructural de los edificios patrimoniales es una actividad que, además de practicarse desde hace siglos, en la actualidad ha adquirido un interés internacional, que se suma a diversos aspectos técnicos. La génesis de las teorías del comportamiento estructural de este tipo de edificios radica en un análisis vectorial (método gráfico) que determina el equilibrio de sus elementos, como arcos, bóvedas, cúpulas, pilares, estribos, contrafuertes, arbotantes, etc.

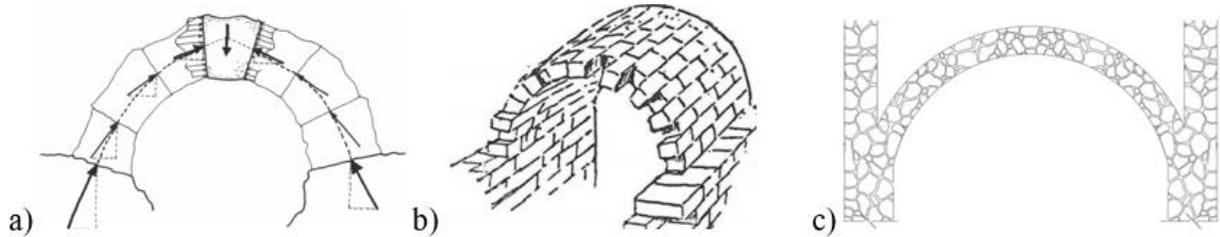


Figura 1. Varios tipos de arcos de mampostería utilizados en edificios históricos: a) sistema de dovelas con sillares irregulares (Huerta, S., 2006); b) sistema de dovelas con sillares regulares (Heyman, J., 1995) c) bóveda de mampostería irregular con mortero (Segovia, M. A., 2022).

En la figura 1 se muestran arcos con diferentes configuraciones de mampostería. Estos tipos de arcos son esenciales para definir el comportamiento estructural de los edificios históricos de mampostería. El Comité Científico Internacional para el Análisis y Restauración de Estructuras del Patrimonio Arquitectónico (ISCARSAH., 2003), es un comité técnico del Consejo Internacional de Monumentos y Sitios (ICOMOS, 2003), refiere en sus principios y directrices que las estructuras de los objetos patrimoniales deben ser conocidas y comprendidas en su totalidad, lo que conlleva la aplicación de métodos de análisis estructural antiguos para comprender el funcionamiento y comportamiento estructural, así como las técnicas que se utilizaron en el pasado para su construcción. En la actualidad, el análisis estructural ha evolucionado utilizando modelos analíticos y computacionales, acompañados de investigaciones experimentales que sustentan el proceso de evaluación estructural. Sin embargo, ambos tipos de análisis se enfrentan a diversas limitaciones. Por ello, aunque haya grandes avances en el análisis estructural computacional, el uso de herramientas antiguas sigue siendo esencial para intentar situarse en la posible visión del antiguo estructurista y comprender así el equilibrio estructural.

Para vislumbrar los problemas que implica el análisis de edificios históricos de mampostería no reforzada e irregular, se citan algunos investigadores de todo el mundo que trabajan en el tema, por mencionar algunos: Block, P., et. al., (2006), quienes afirman que la estática gráfica, las herramientas interactivas y de análisis límite basadas en procedimientos gráficos proporcionan métodos para caracterizar y evaluar la estabilidad estructural de sistemas complejos de mampostería que son eficientes y rápidos de procesar, Chávez M., (2005/2010) ha proporcionado información valiosa respecto al comportamiento estructural de sistemas completos de edificios patrimoniales y propiedades mecánicas de la mampostería, modelados con elementos finitos continuos. Por otro lado, Angelillo M., et al., (2014), han trabajado en procedimientos de análisis estructural de sistemas y elementos de mampostería histórica discretizados, considerando la interacción de contacto entre ellos. Durán D., et. al., (2022), quienes han estudiado las propiedades mecánicas de iglesias antiguas ubicadas en diferentes partes del mundo.

2. RECONOCIMIENTO DEL SISTEMA ESTRUCTURAL DEL OBJETO PATRIMONIAL

El objeto patrimonial analizado es un templo mexicano que data del siglo XVI, ubicado en el Estado de Hidalgo en el poblado de Santa Catarina, su estructura original fue realizada con piedras irregulares y argamasa de tierra del sitio, cuenta con 6 contrafuertes en los muros laterales, estos últimos sirven de base para la bóveda de cañón corrido que se encuentra confinada y cargada en su parte superior con tierra del sitio. La figura 2 muestra la construcción antes y después de integrar elementos de concreto reforzado y presenta indicios de su comportamiento estructural.



Figura 2. Templo de la Santa Catarina; a) edificio conservado (Biblioteca Tomás Navarro Tomás, 2023); b) estado actual del templo; c) y d) grietas en la clave y los riñones, respectivamente. Tomado de (Segovia, M. A., 2022).

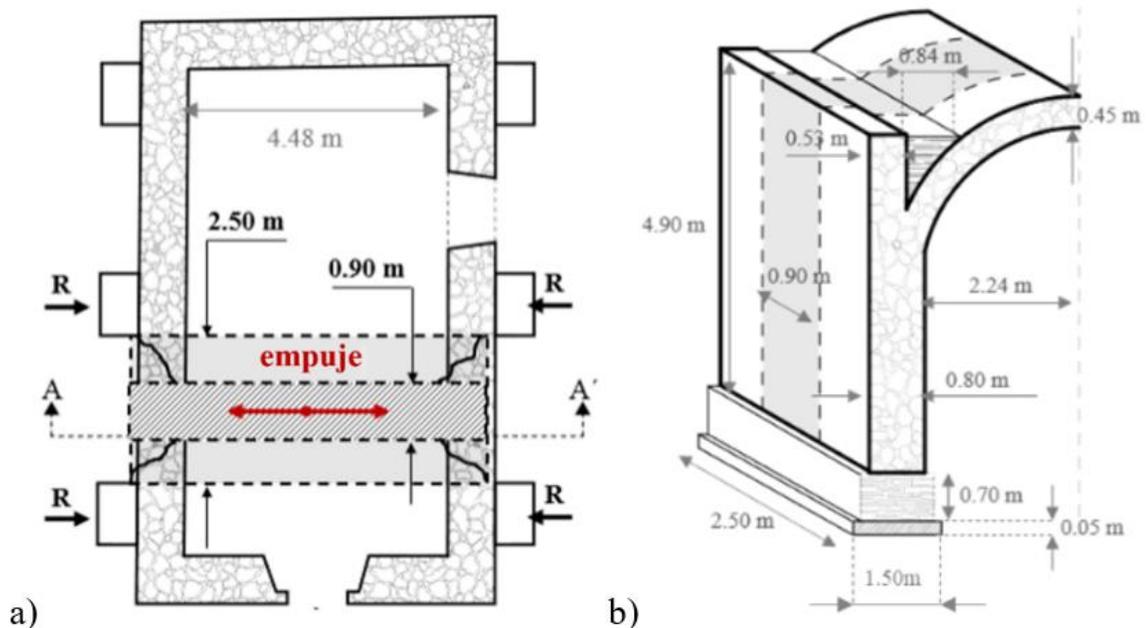


Figura 3. Franjas seleccionadas para el análisis; a) vista en planta; b) vista tridimensional de las franjas Fr1 y Fr2 con anchos de 0,90 m y 2,50 m, respectivamente. Dimensiones en metros.

3. DISCRETIZACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS SUBSISTEMAS

Se seleccionan las franjas con mayor susceptibilidad a deformarse lateralmente. Dado que no están totalmente restringidas por los contrafuertes (ver figura 4).

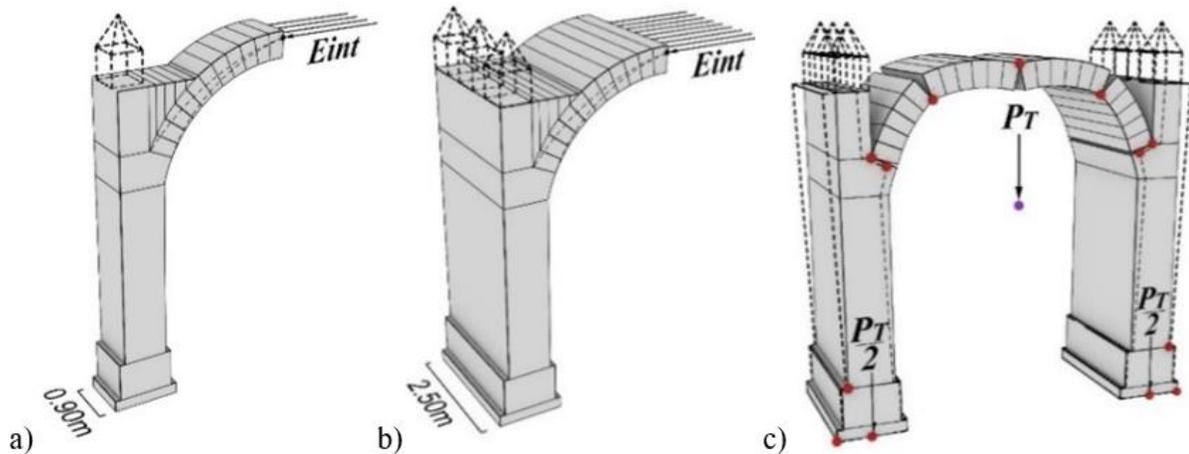


Figura 4. Vista en 3D de las franjas Fr (subsistemas) seleccionadas para el análisis, a) subsistema Fr1 de 0.90 m, b) subsistema Fr2 de 2.50 m de ancho, c) representación de la formación de bisagras en puntos específicos análogos a los del objeto patrimonial real (ver figura 3). Dimensiones en metros.

En la figura 4, para ambos sistemas, se ejemplifica el empuje horizontal intermedio (Eint) cercanamente al empuje mínimo (Emin) (ver figura 8). Teoría tomada de (Heyman, J., 1995; Huerta, S., 2004, Mas-Guindal; A. J., 2021). En los muros se adopta la fisuración por tensión diagonal a 45 grados, similar a la del concreto no reforzado (Meli, R. 2011). A diferencia de los edificios construidos actualmente con materiales y sistemas constructivos continuos, la formación de bisagras no representa como tal una degradación de la rigidez, sino que indica los puntos de equilibrio y los patrones de comportamiento de las condiciones físicas actuales del objeto patrimonial. Se discretizan geoméricamente los elementos estructurales pertenecientes a las franjas seleccionadas (ver figura 5), se modela la geometría con la tendencia de comportamiento estructural que presenta o ha presentado el objeto patrimonial, para ubicar los puntos de contacto y así visualizar la conformación de posibles bisagras, lo que sirve como base teórica para generar las divisiones virtuales en los modelos geoméricos. Las líneas punteadas son posibles pináculos para redireccionar los vectores de empuje (ver figuras 6 y 10).

4. SUCESIÓN NUMÉRICO-VECTORIAL DEL SUBSISTEMA

El análisis vectorial consiste en la representación de fuerzas con determinadas magnitudes y direcciones que dan lugar a una secuencia de empujes o reacciones entre los distintos elementos volumétricos (bloques) que componen el sistema analizado; en este documento, este análisis se utiliza para la representación gráfica de las cargas gravitatorias generadas por cada uno de los bloques (ver figura 5) y para la simulación de los vectores resultantes. También se consideran elementos mecánicamente homogéneos e isotrópicos con resistencia prácticamente infinita, sin deslizamiento entre bloques y sin esfuerzos de tracción, según (Heyman, J. 1969; Huerta, S. 2004). Debido que el edificio cuenta con tierra compactada, se considera que ésta tiene una densidad de 1,600 kg/m³, cabe mencionar que la tierra puede tomar otros pesos en épocas de lluvia, ya que el

peso de la tierra húmeda, según (Minke, G. 1994) podría aumentar hasta 1,800 kg/m³. Debido a que el peso volumétrico es fundamental para mantener en equilibrio este tipo de estructuras, se utilizan 2,700 kg/m³, ya que, al determinar las líneas de empuje con un parámetro menor, éstas se salen de la geometría (ver figura 10). En cuanto a las características físicas determinadas por (Chávez, Mauricio M. 2010), encontró que el peso volumétrico posible de mampostería irregular unida con mortero de cal es de 1,627kg/m³.

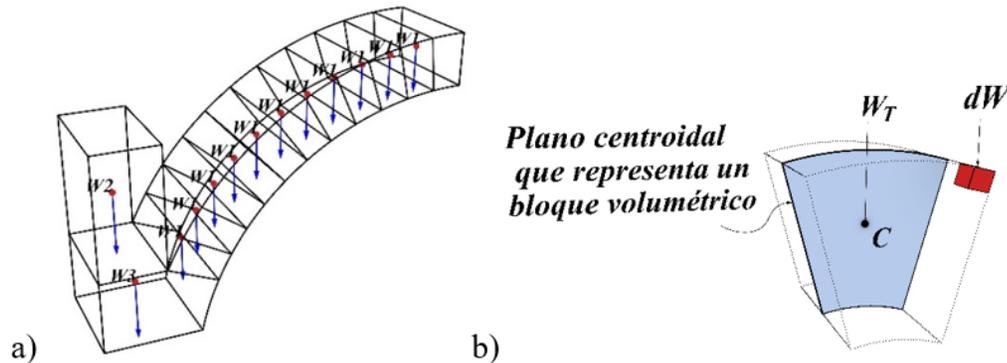


Figura 5. Centros de gravedad de los bloques que forman el sistema, a) fuerzas gravitacionales (W) concentradas en los elementos estructurales discretizados, b) peso total (WT) y peso diferencial (dW) de cada elemento atomizado, donde: C = Centro de gravedad.

En la figura 5, la teoría se tomó y adaptó de (Egor, P. P. y Toader, A. B. 1999; Goodno, B. J. y Gere, J. M., 2013; Hibbeler, R.C. 2016). Las variables vectoriales (\vec{W}_i) se representan con una flecha según (Spiegel, M. R. 1970).

Dado que el elemento discretizado es isotrópico y homogéneo, su peso total es la suma de los pesos diferenciales (ver ecuación 1 y figura 6b). (Hibbeler, R.C. 2016) menciona que, si un cuerpo está hecho de un material homogéneo, tiene una densidad constante y la fuerza generada por el peso del cuerpo pasa por un centro volumétrico (centro de gravedad). Aplicando estos principios al objeto presentado en la figura 5a, es posible visualizar los vectores gravitacionales que se cruzan con el centro de gravedad de cada elemento homogéneo y discretizado. La figura 6 ilustra los planos medios y su soporte matemático para localizar y representar los centros de gravedad de elementos volumétricos de tipo dovela, idealizados como elementos planos (áreas). Las ecuaciones (2)-(7) definen lo anterior; aplicando estas expresiones matemáticas, se determinan tanto las superficies de los planos discretizados de los bloques que representan los segmentos, como las ordenadas de sus centros de gravedad. El centro de gravedad se calcula con momentos de primer orden (Egor, P. P. y Toader, A. B. 1999; Goodno, B. J. y Gere, J. M. 2013).

$$\Sigma dW = W_T \tag{1}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 dA_1 + x_2 dA_2 + \dots + x_n dA_n}{A} = \frac{\Sigma x dA_i}{A} \tag{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 dA_1 + y_2 dA_2 + \dots + y_n dA_n}{A} = \frac{\Sigma y dA_i}{A} \tag{3}$$

$$\Sigma dA_i = A \tag{3'}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad (4)$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \quad (5)$$

$$\bar{y} = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha} \quad (6)$$

$$A_{fc} = \alpha \cdot r^2 \quad (7)$$

Donde: dW = peso diferencial del elemento, W_T = Peso Total del elemento, x = distancia desde el eje “x” al centroide de dA , y = distancia desde el eje “y” al centroide de dA , dA = área diferencial, $i=1$ a n , n = número de los elementos discretizados, A = área total, A_{fc} = área del cono, α = ángulo, r = radio del sector circular.

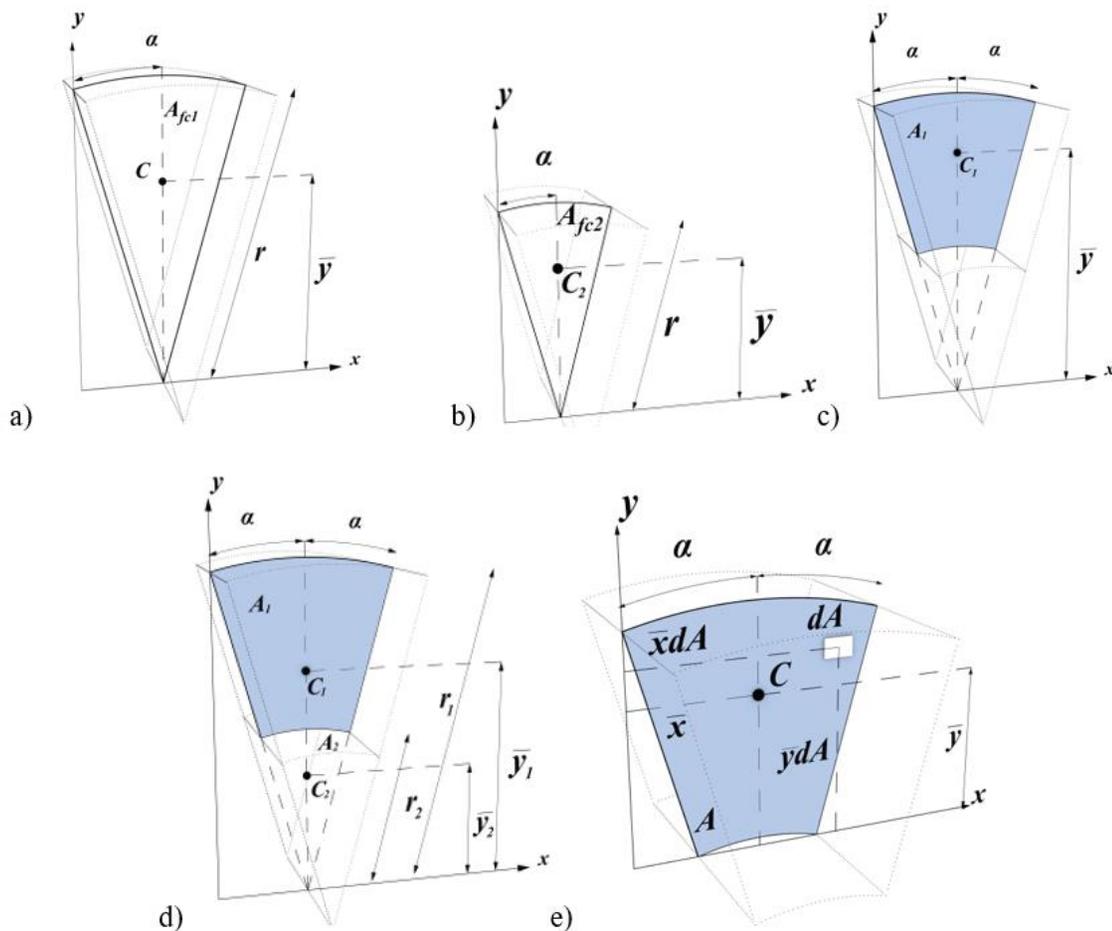


Figura 6. Secuencia matemática para obtener los centros de gravedad de los bloques, a) plano completo (Área) representativo de la forma original, b) plano a sustraer de la forma original, c) plano del segmento resultante, d) discretización de las propiedades geométricas de las áreas A1 y A2, e) Centro volumétrico del bloque discretizado como segmento resultante.

En la figura 6, A_{fc} = Área de la forma cónica, C_1 = Centro de gravedad de A_1 , C_2 = Centro de gravedad de A_2 , A_1 = Área que queda después de restar, A_2 = Área que se resta, α = Ángulo de apertura (en grados) del sector circular al eje centroidal, g = generatriz cónica, \bar{y}_1 = Distancia del eje “x” al centroide de A_1 , \bar{y}_2 = Distancia del eje “x” al centroide de A_2 , A = Área resultante, C = Centro de gravedad de A , dA = Área parcial, r = radio, El ángulo α se afecta por $(\pi/180)$ para convertir a radianes.

Con las expresiones numéricas mostradas en la figura 6 se obtienen las propiedades geométricas para el análisis del subsistema arco (ver figura 7). En la figura 6 se superponen los elementos discretizados (dovelas) para diferenciar el centro de gravedad en función de su posición referida a los ejes locales (x' , y'), sin embargo, para este caso todos los elementos del subsistema arco tienen el mismo peso volumétrico (ver tabla 3). La línea de empuje (línea de compresión) modifica su trayectoria sucesivamente cuando prácticamente interseca la línea vertical del centro de gravedad de cada segmento. En el caso de que la línea de compresión salga de la geometría, significa que la compresión estaría fuera del elemento y, por tanto, los bloques dejarían de estar en contacto entre sí en esa sección. El empuje mínimo se representa como una fuerza horizontal en la zona superior de los segmentos, comúnmente denominada extradós de dovela. En el caso de un sistema de gravedad simétrico, basta con analizar una mitad (ver figura 9) para conocer la trayectoria de la línea de empuje a compresión, por lo que es imprescindible determinar adecuadamente las cargas de gravedad y los centros de gravedad de cada uno de los bloques ya que de ello depende la correcta generación del empuje entre bloques adyacentes.

Table 1. Centros de gravedad numéricos y código de colores de los segmentos discretizados que componen el subsistema del arco (ver figura 7).

EL _i	CE _i	\bar{x}'_i (m)	\bar{y}'_i (m)
1		0.1547	0.2397
2		0.1756	0.2496
3		0.1945	0.2568
4		0.2114	0.2612
5		0.2259	0.2627
6		0.2379	0.2614
7		0.2473	0.2572
8		0.2541	0.2501
9		0.2580	0.2402
10		0.2591	0.2280
11		0.2571	0.2127

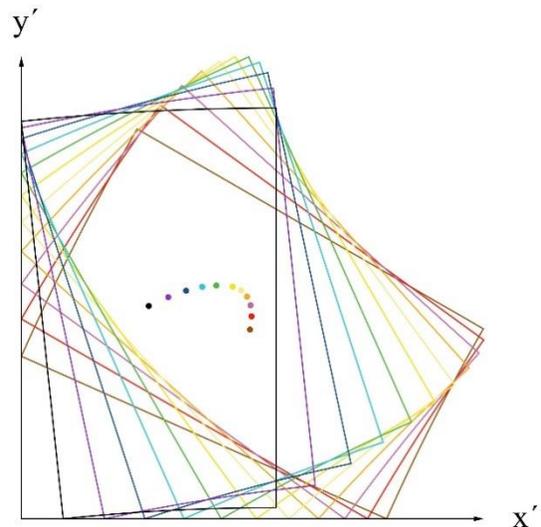


Fig. 7. Discretización virtual por bloques (dovelas) del subsistema arco, donde: EL: Elemento discretizado, CE: Color del elemento, A = Área del plano centroidal, $i=1$ a n , n = número de los elementos discretizados (11 para el subsistema arco del objeto de estudio, ver figuras 4 y 9).

Para determinar la trayectoria de la línea de empuje, emanada del subsistema tipo arco, es necesario seleccionar el lugar exacto y/o el más crítico posible en función del estado del objeto físico real. En caso de desarrollar el análisis con el empuje mínimo crítico, prácticamente intersectando el vértice, significaría que dicho subsistema se encuentra en colapso inminente. Para determinar la trayectoria de la línea de empuje, se puede utilizar el polígono funicular y el polígono de fuerzas para proporcionar el flujo de fuerzas en los elementos estructurales de sistemas con formas

alternativas (Markou, A. A. y Ruan, G. 2022). La figura 8 muestra el empuje horizontal mínimo y la modificación de su trayectoria en cada elemento (bloque), debido a la interacción con las fuerzas que actúan sobre los centros de gravedad. La Tabla 2 presenta las propiedades que representan y configuran cada elemento de los sistemas Fr1 y Fr2 con muros y cimientos.

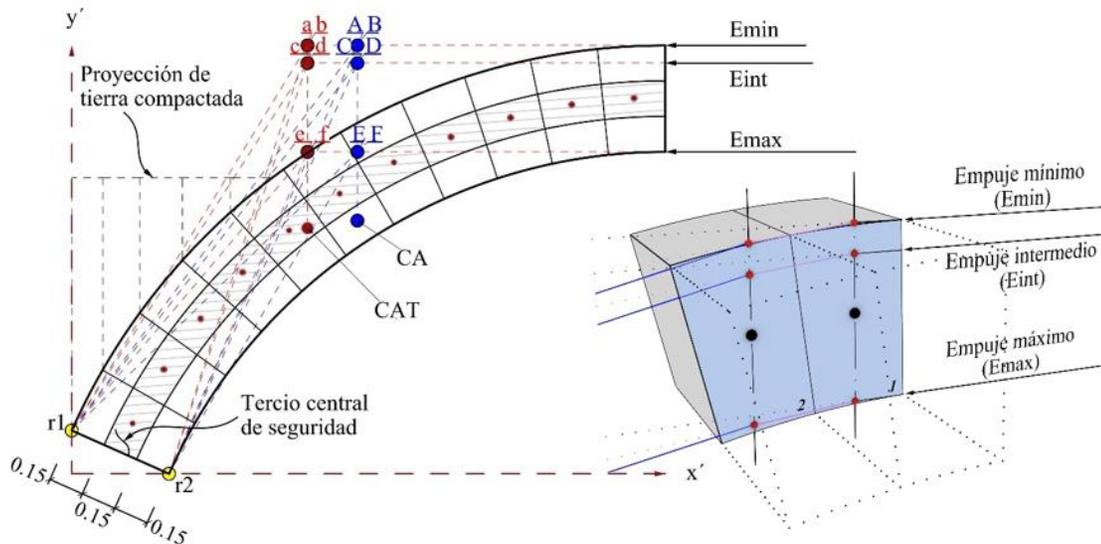


Fig. 8. Sucesión de vectores en cada segmento, generados por los empujes laterales, ilustrando la modificación de las trayectorias al intersectar la proyección de la línea vertical que pasa por el centro de gravedad de cada elemento. Arco del subsistema e identificación de las posibles trayectorias de las líneas de empuje y torsión en la base de la bóveda. Dimensiones en metros.

En la figura 8, E_{min} = Empuje mínimo, E_{int} = Empuje intermedio, E_{max} = Empuje máximo, r_1 - r_2 : puntos de rotación. Nodos (a)-(f): intersecciones entre la línea vertical que pasa por el centroide del subsistema de arco de tierra compactada y los empujes vectoriales. Nodos (A)-(F): intersecciones entre la línea vertical que pasa por el centroide del subsistema arco sin tierra y los empujes vectoriales. CA y CAT: centros de gravedad de los subsistemas arco sin tierra y tierra compactada, respectivamente. Teoría tomada de (Barlow, William Henry 1846; Meli, R. 1998).

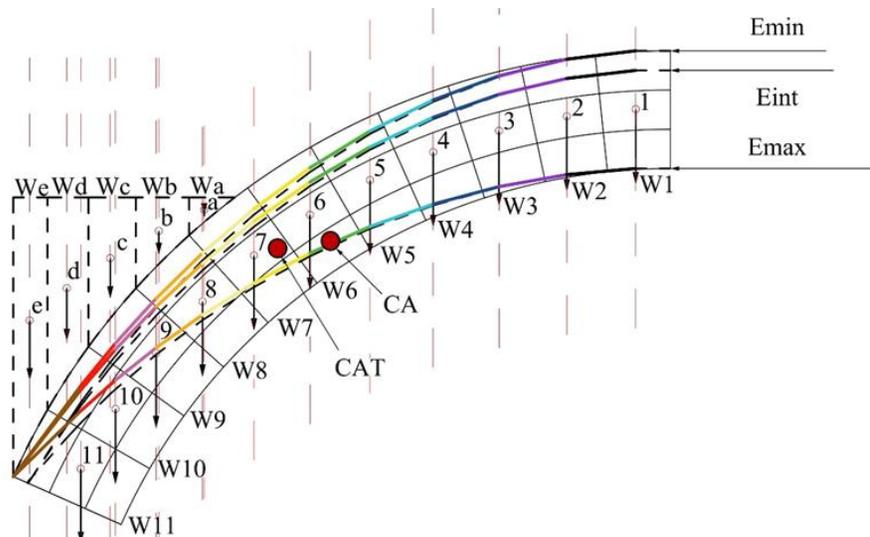


Fig. 9. Ubicación de las líneas de empuje cuando el subsistema arco tiende a rotar con respecto al punto "r1". Cabe mencionar que el punto de rotación "r1" fue elegido ya que así es como se comporta el objeto real (ver figura 4c).

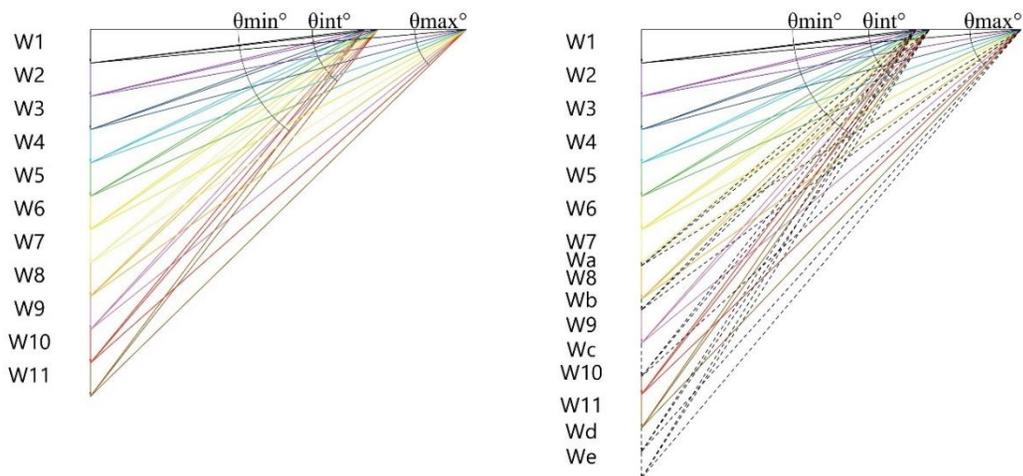


Fig. 9.1. Representación de líneas de empuje. Las líneas continuas representan el empuje de las dovelas y las punteadas el empuje de la tierra comprimida encima del arco, en la Tabla 3 se muestran las magnitudes de los empujes en este subsistema. Ambas figuras expresan las magnitudes en Emax, Eint, y Emin (ver figura 9).

Tabla 2. Magnitudes y ángulos de los vectores en el subsistema de arco sin tierra.

Subsistema de arco sin tierra									
Elemento	Emax			Eint			Emin		
	Vr _i (Kg)		θ°max	Vr _i (Kg)		θ°int	Vr _i (Kg)		θ°min
	Fr1	Fr2		Fr1	Fr2		Fr1	Fr2	
EL	3,248.85	9,024.58	0	2,464.03	6,844.53	0	2,350.48	6,529.11	0
1	3,261.63	9,060.08	5.07	2,480.85	6,891.25	6.68	2,368.11	6,578.08	7
2	3,299.67	9,165.75	10.07	2,530.66	7,029.61	13.18	2,420.24	6,722.89	13.79
3	3,362.11	9,339.19	14.91	2,611.55	7,254.31	19.35	2,504.70	6,957.50	20.21
4	3,447.63	9,576.75	19.55	2,720.77	7,557.69	25.09	2,618.38	7,273.28	26.15
5	3,554.57	9,873.81	23.94	2,855.06	7,930.72	30.34	2,757.66	7,660.17	31.53
6	3,681.05	10,225.14	28.04	3,011.07	8,364.08	35.08	2,918.88	8,108.00	36.36
7	3,825.14	10,625.39	31.86	3,185.61	8,848.92	39.33	3,098.62	8,607.28	40.63
8	3,984.93	11,069.25	35.39	3,375.81	9,377.25	43.12	3,293.85	9,149.58	44.47
9	4,158.61	11,551.69	38.63	3,579.17	9,942.14	46.49	3,501.97	9,727.69	47.84
10	4,344.52	12,068.11	41.60	3,793.58	10,537.72	49.49	3,720.83	10,335.64	50.82
11	4541.14	12,614.28	44.32	4,017.26	11,159.06	52.17	3,948.64	10,968.44	53.47

Donde: Emax= Empuje máximo, Eint= Empuje intermedio, Emin= Empuje mínimo, Vr= Vector de empuje perteneciente al elemento “i” (representado con magnitud), i=1 a n, n= Elementos discretizados, Eh= Empuje horizontal, θ= Ángulo en grados. Fr1 y Fr2, son subsistemas estructurales con espesores de 0.90m y 2.50m, respectivamente.

Tabla 3. Valores numérico-vectoriales de las propiedades físico-geométricas de los subsistemas Fr1 y Fr2, ordenados sucesivamente para el análisis vectorial.

EL _i	x _i (m)	y _i (m)	A _i (m ²)	V _i (m ³)		W _i (kg)		\vec{W}_i (cm)	
				Fr1	Fr2	Fr1	Fr2	Fr1	Fr2
1	0.1547	0.2397	0.1187	0.1068	0.2968	288.44	801.23	28.84	80.12
2	0.1756	0.2496							
3	0.1945	0.2568							
4	0.2114	0.2612							
5	0.2259	0.2627							
6	0.2379	0.2614							
7	0.2473	0.2572							
a	0.0573	0.0969	0.0122	0.0110	0.0306	17.61	48.91	1.76	4.89
8	0.2541	0.2501	0.1187	0.1068	0.2968	288.44	801.23	28.84	80.12
b	0.0874	0.2192	0.0492	0.0443	0.1230	70.87	196.87	7.09	19.69
9	0.2580	0.2402	0.1187	0.1068	0.2968	288.44	801.23	28.84	80.12
10	0.2591	0.2280							
c	0.0830	0.3386	0.0822	0.0740	0.2056	118.44	328.99	11.84	32.90
11	0.2574	0.2139	0.1187	0.1068	0.2968	288.44	801.23	28.84	80.12
d	0.0736	0.4648	0.1074	0.0966	0.2684	154.62	429.50	15.46	42.95
e	0.0622	0.5975	0.1218	0.1096	0.3044	175.35	487.08	17.53	48.71
12	0.4188	0.3036	0.5147	0.4633	1.2868	1250.79	3474.42	125.08	347.44
13	0.4000	1.6000	2.5600	2.3040	6.4000	6220.80	17280.01	622.08	1728.00
14	0.5250	0.3500	0.7350	0.6615	1.8375	1786.05	4961.25	178.61	496.13
15	0.6375	0.1000	0.2550	0.2295	0.6375	367.20	1020.00	36.72	102.00
f	0.2667	0.4149	0.4268	0.2024	0.6072	323.82	971.45	32.38	97.14
16	0.2667	0.5337	0.5694	0.5124	1.4235	1383.61	3843.36	138.36	384.34

Donde: EL= Elemento discretizado, A = Área del plano centroidal, i =1 a n, n= número de elementos discretizados, V= Volumen, W= Carga gravitacional, \vec{W}_i = Magnitud del vector que representa la carga gravitacional. Fr1 y Fr2, son subsistemas estructurales con espesores de 0.90m y 2.50m, respectivamente.

Las filas sombreadas representan los elementos discretos de tierra situados por encima de la bóveda (ver figura 9). Los valores referidos a la letra "f" representan los elementos "pináculo", donde los casos Fr1 y Fr2 tienen uno y tres pináculos, respectivamente (ver figura 10). La figura 10 y la tabla 4 presentan el análisis y los resultados de los subsistemas simétricos (con muro y cimentación) para los casos con y sin tierra en la parte superior de la bóveda, y con y sin pináculos.

Tabla 4. Magnitudes y ángulos de empujes por elemento en el sistema simétrico con muro y cimentación para las doce trayectorias posibles de la línea de empuje presentadas en la figura 10.

Subsistema simétrico con y sin tierra encima del arco									
Elemento	E _{max}			E _{int}			E _{min}		
	V _{r_i} (Kg)		θ° _{max}	V _{r_i} (Kg)		θ° _{int}	V _{r_i} (Kg)		θ° _{min}
	Fr ₁	Fr ₂		Fr ₁	Fr ₂		Fr ₁	Fr ₂	
EH	3,135.70	8,710.28	0	2,378.21	6,606.14	0	2,268.62	6,301.72	0
1	3,148.94	8,747.06	5.26	2,395.64	6,654.56	6.92	2,286.88	6,352.44	7.25
2	3,188.33	8,856.47	10.42	2,447.18	6,797.72	13.64	2,340.82	6,502.28	14.27
3	3,252.91	9,035.86	15.43	2,530.75	7,029.86	19.99	2,428.05	6,744.58	20.88
4	3,341.23	9,281.19	20.20	2,643.31	7,342.53	25.88	2,545.15	7,069.86	26.96
5	3,451.46	9,587.39	24.70	2,781.34	7,725.94	31.23	2,688.23	7,467.31	32.44
6	3,581.59	9,948.86	28.90	2,941.26	8,170.17	36.04	2,853.38	7,926.06	37.34
7	3,729.52	10,359.78	32.78	3,119.71	8,665.86	40.33	3,037.00	8,436.11	41.67
a	3,739.09	10,386.36	33.00	3,131.14	8,697.61	40.58	3,048.73	8,468.69	41.92
8	3,903.70	10,843.61	36.56	3,325.98	9,238.83	44.35	3,248.52	9,023.67	45.70
b	3,946.33	10,962.03	37.38	3,375.91	9,377.53	45.21	3,299.62	9,165.61	46.56
9	4,127.82	11,466.17	40.57	3,586.39	9,962.19	48.46	3,514.67	9,762.97	49.80
c	4,205.81	11,682.81	41.79	3,675.88	10,210.78	49.69	3,605.94	10,016.50	51.01
10	4,403.29	12,231.36	44.59	3,900.28	10,834.11	52.43	3,834.44	10,651.22	53.73
11	4,610.37	12,806.58	47.15	4,132.64	11,479.56	54.87	4,070.56	11,307.11	56.13
d	4,724.89	13,124.69	48.42	4,260.03	11,833.42	56.06	4,199.83	11,666.19	57.30
e	4,857.45	13,492.92	49.79	4,406.59	12,240.53	57.34	4,348.43	12,078.97	58.55
12	5,865.52	16,293.11	57.68	5,501.16	15,281.00	64.39	5,454.68	15,151.89	65.42
13	11,612.70	32,257.50	74.33	11,431.45	31,754.03	77.99	11,409.15	31,692.08	78.53
14	13,341.12	37,058.67	76.41	13,183.66	36,621.28	79.61	13,164.33	36,567.58	80.08
15	13,698.31	38,050.86	76.77	13,545.00	37,625.00	79.89	13,526.19	37,572.75	80.34
f	14,013.73	-	77.07	13,863.90	-	80.12	13,845.52	-	80.57
f	-	40,682.39	77.64	-	40,284.36	80.56	-	40,235.56	80.99
16	15,365.37	-	78.22	15,228.85	-	81.02	15,212.12	-	81.42
16	-	44,444.25	78.70	-	44,080.19	81.38	-	44,035.61	81.77

Donde: E_{max}= Empuje máximo, E_{int}= Empuje intermedio, E_{min}= Empuje mínimo, V_r= Vector de empuje perteneciente al elemento “i” (representado con magnitud), i=1 a n, n= Elementos discretizados, E_h= Empuje horizontal, θ= Ángulo en grados. Fr₁ y Fr₂, son subsistemas estructurales con espesores de 0.90m y 2.50m, respectivamente.

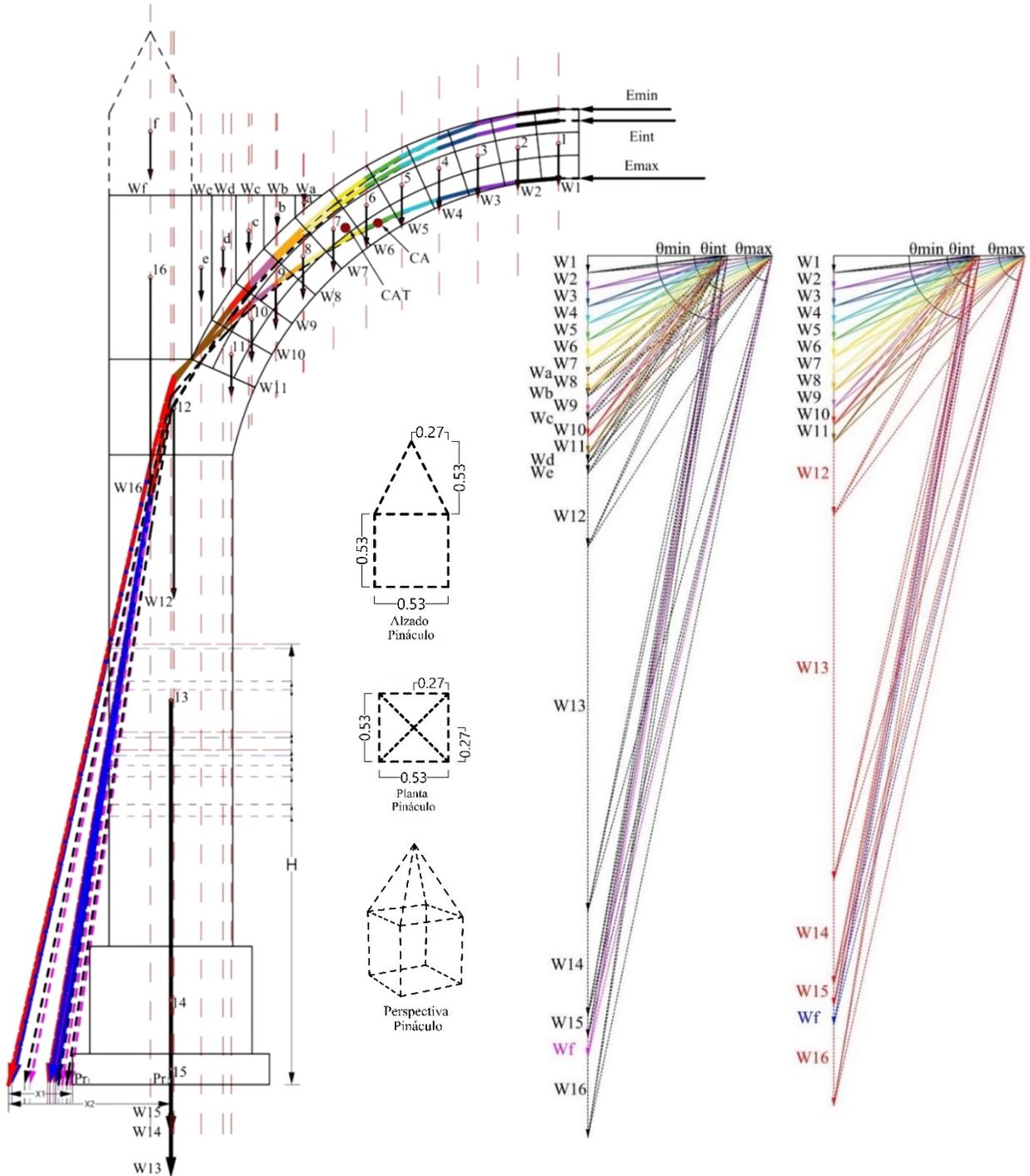


Figura 10. Análisis vectorial de los subsistemas simétricos, donde se pueden observar las magnitudes y direcciones de los empujes generados por todos los elementos, con y sin las cargas de tierra y pináculo.

En la figura 10, los vectores que representan las cargas W13, W14 y W15 se dibujaron con la mitad de longitud y su grosor se duplica para que sigan teniendo una magnitud gráficamente representativa. En esta figura sólo se muestra el análisis vectorial para Fr1 y las dimensiones se encuentran en metros. Nota: La línea negra punteada y sin flecha representa el empuje calculado con un peso volumétrico de la mampostería de 1627 kg/m^3 , la cual sale de la geometría.

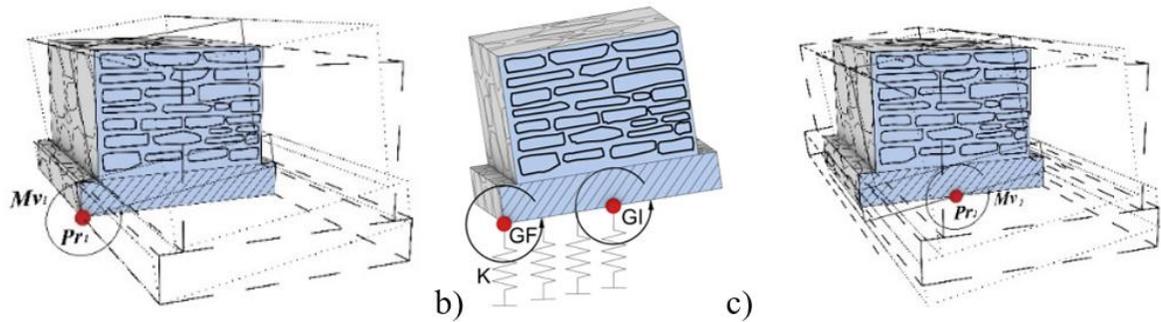


Figura 11. Momentos de volteo según el comportamiento de la cimentación en diferentes tipos de suelo. a) cimentación colocada sobre suelo no compresible, b) cimentación colocada sobre suelo medianamente compresible, c) cimentación colocada sobre suelo altamente compresible.

La figura 11 muestra los posibles momentos de volteo de los cimientos. La tabla 5 muestra las magnitudes y relaciones de los momentos de volteo actuantes (M_v) y resistentes (M_r) según los vectores resultantes para los diferentes subsistemas (ver figura 10). M_v = Momento de volteo, G_I = Rotación inicial, G_F = Rotación final, K = Rigidez vertical del suelo. Teoría tomada de (Meli, R. 2011) y adaptada por el autor.

Por otro lado, también se desarrollaron análisis digitales mediante software (Computers and Structures, Inc. 2023), basados en el Método de los Elementos Finitos (MEF). Las Figuras 12 a 17 muestran las simulaciones del comportamiento estructural de la franja Fr1, que consideran la estructura continua y discontinua. En los modelos discontinuos, las separaciones de los elementos finitos se simularon en las zonas agrietadas de la bóveda en el objeto real. En los modelos continuos, no se simularon tales separaciones. Para la modelización se tuvieron en cuenta elementos de tipo cáscara plana (shell) y elementos de tipo sólido 3D. Según (Circolare, 2019), el módulo elástico (E), para todos los modelos, se tomó como 7036 kg/cm^2 . El módulo de Poisson de 0.17. La densidad de los materiales se consideró la misma que en los análisis gráficos.

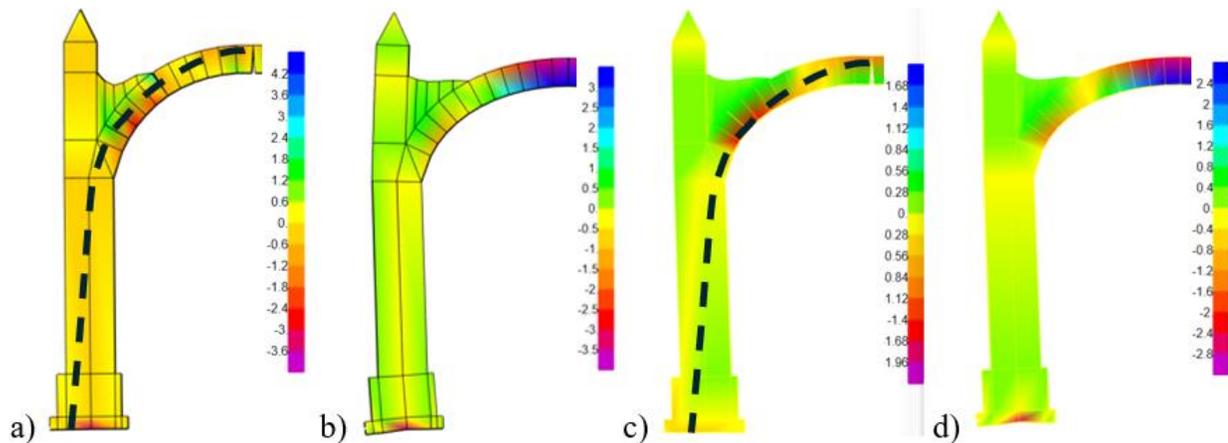


Figura 12. Esfuerzos en kg/cm^2 y comportamiento de las deformaciones en una mitad simétrica con pináculos, con relleno de tierra sobre la bóveda y con rotación libre en el centro de la cimentación. Casos: a) discontinuo con "shell". b) continuo con "shell". c) discontinuo con sólidos. d) continuo con sólidos.

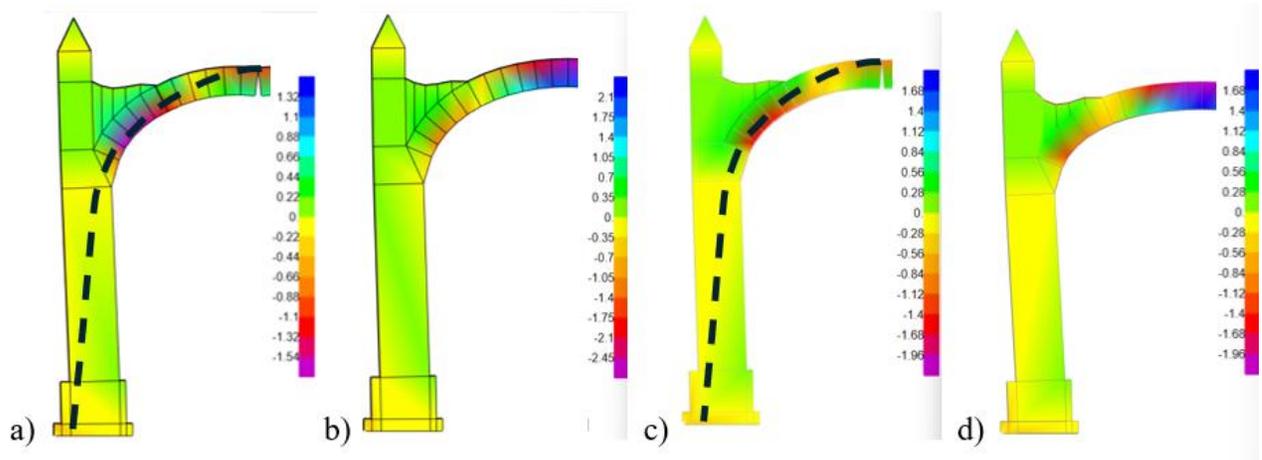


Figura 13. Esfuerzos en kg/cm^2 y comportamiento de las deformaciones en una mitad simétrica con pináculos, con relleno de tierra sobre la bóveda y con apoyo total de la cimentación. Casos: a) discontinuo con "shell". b) continuo con "shell". c) discontinuo con sólidos. d) continuo con sólidos.

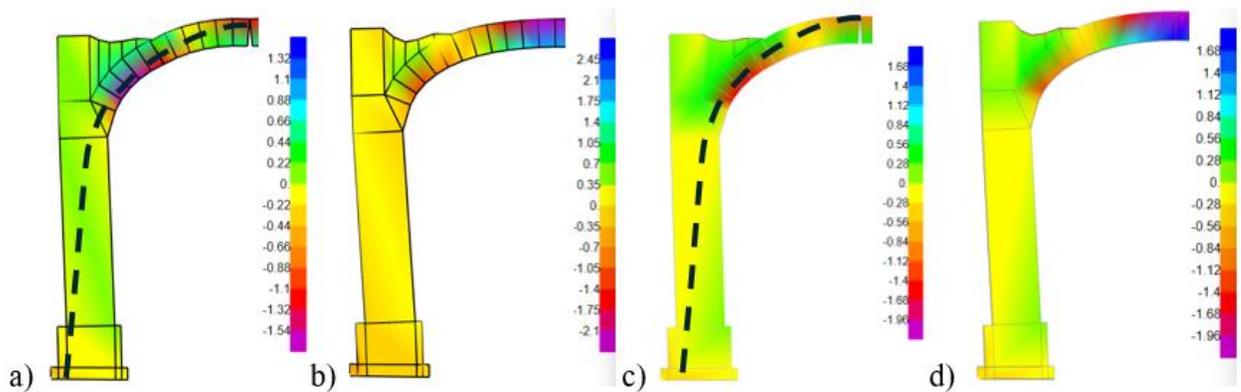


Figura 14. Esfuerzos en kg/cm^2 y comportamiento de las deformaciones en una mitad simétrica sin pináculos, con relleno de tierras sobre la bóveda y giro libre en el centro de la cimentación. Casos: a) discontinuo con "shell". b) continuo con "shell". c) discontinuo con sólidos. d) continuo con sólidos.

Los modelos de franjas Fr1 mostrados en las figuras 15a y 15b representan periodos de vibración en la dirección paralela al plano de $T=0,1$ s y $T=0,51$ s respectivamente, ambos casos, se desarrollaron con la base de cimentación simplemente apoyada.

Como se puede observar en las figuras 13 a 16, las líneas de compresión no salen de la geometría de las estructuras, ya que estos modelos de elementos finitos tienden a desarrollar equilibrio entre tensión y compresión en materiales elásticos continuos.

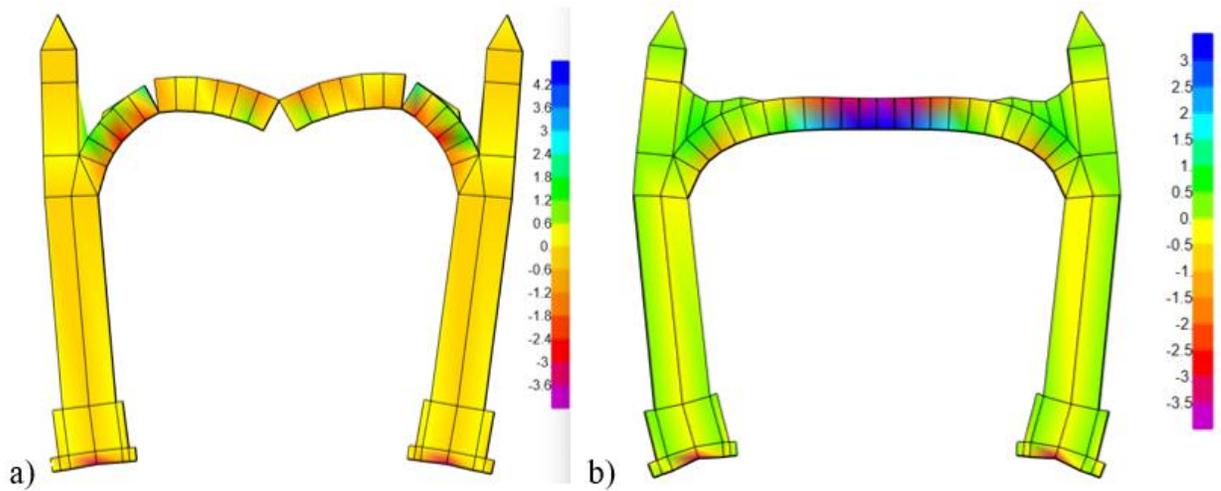


Figura 15. Simulación virtual del comportamiento estructural de la franja completa Fr1 mediante elementos finitos. a) Franja Fr1 modelada con elementos tipo "shell" discontinuos según la problemática que presenta el objeto real. b) Franja Fr1 modelada con elementos tipo "shell" continuos. Ambos modelos permiten la rotación en la cimentación.

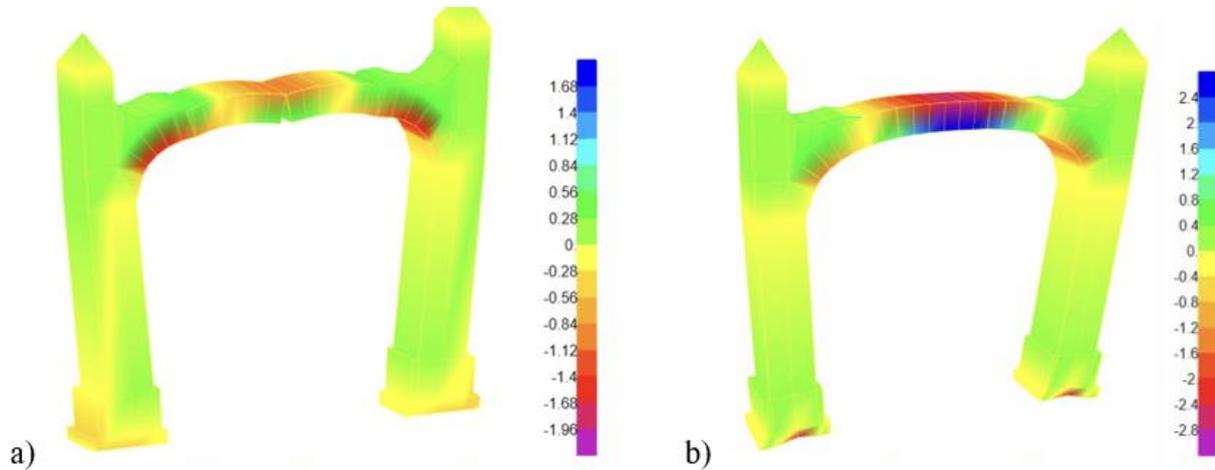


Figura 16. Simulación virtual del comportamiento estructural de la franja completa Fr1 mediante elementos finitos. a) Franja Fr1 modelada con elementos discontinuos de tipo sólido de acuerdo con la problemática que presenta el objeto real. b) Franja Fr1 modelada con elementos continuos de tipo sólido.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La aplicación de ecuaciones matemáticas y su procesamiento computacional disminuyó el tiempo de trazos gráficos, dado que en una misma franja sistematizada se desarrollaron doce casos diferentes de comportamiento estructural y los resultados fueron más exactos, dada la precisión requerida por el análisis vectorial. El proceso de análisis de edificios históricos de mampostería con arcos y sistemas simétricos presentado en este trabajo puede ser aplicado en la investigación y en la práctica profesional de forma rápida y precisa, para encontrar las cargas necesarias para mantener el equilibrio estático estructural. El proceso matemático para determinar las áreas de dovelas se basa en arcos completamente curvos, en caso de requerir analizar arcos con segmentos rectos, estas ecuaciones matemáticas deben cambiarse.

Tabla 5. Resultados de las diferentes líneas de empuje en los subsistemas simétricos con muro y cimentación para las doce configuraciones posibles analizadas para Fr1.

ELEMENTO			Vuri (kg)	Py (Kg)	H (m)	X1 (m)	X2 (m)	θ°	Mv1 (kg-m)	Mr/ Mv1 (%)	Mv2 (kg-m)	Mr/ Mv2 (%)
Emin	c/t	c/p	15,212.12	14,916.55	2.57	0.28	0.92	78.69	4,176.63	200	13,723.23	61
		s/p	14,892.00	14,578.04	2.63	0.31	0.95	78.21	4,519.19	184	13,849.13	60
	s/t	c/p	14,697.62	14,347.17	2.84	0.29	0.93	77.46	4,160.68	200	13,342.87	62
		s/p	14,378.13	14,020.16	2.87	0.41	1.05	77.19	5,748.26	145	14,721.16	57
Eint	c/t	c/p	15,228.85	15,056.43	2.01	0.07	0.71	81.37	1,053.95	791	10,690.06	78
		s/p	14,909.09	14,725.74	2.08	0.09	0.73	81.01	1,325.32	629	10,749.79	78
	s/t	c/p	14,716.36	14,508.00	2.26	0.15	0.79	80.35	2,176.20	383	11,461.32	73
		s/p	14,397.29	14,184.28	2.29	0.16	0.80	80.13	2,269.49	367	11,347.43	73
Emax	c/t	c/p	15,365.37	15,206.82	1.75	0.02	0.66	81.76	304.14	2740	10,036.50	83
		s/p	15,048.51	14,879.78	1.82	0.04	0.68	81.41	595.19	1400	10,118.25	82
	s/t	c/p	14,864.51	14,672.47	2.14	0.11	0.75	80.78	1,613.97	516	11,004.35	76
		s/p	14,570.44	14,373.71	2.18	0.12	0.76	80.57	1,724.85	483	10,924.02	76

Donde: Py= Componente vertical del último vector (Vuri), H= Altura medida desde la superficie de contacto de los cimientos con el suelo hasta la intersección del último vector (Vuri) con la línea perimetral (frontera) del muro (Elemento 13 para este objeto de estudio), X= dimensión medida del punto de rotación en Py, Mv1= momento de volteo en suelo muy duro, Mv2= momento de volteo en suelo muy blando, Mr= momento resistente= 8334 kg-m, s/t= sin tierra, s/p= sin pináculos, c/t= con tierra, c/p= con pináculos. En esta tabla solo se presentan los resultados del subsistema Fr1, ya que son proporcionales en función del ancho de las franjas.

Al comparar los resultados del análisis gráfico con los obtenidos de los análisis con elementos finitos, se observa que el comportamiento estructural tiende a ser similar, pero con algunas particularidades, los muros tienden a girar hacia el exterior y la bóveda es propensa a bajar, donde la parte superior de la clave se desplaza hacia abajo por efectos gravitacionales. En los elementos modelados como discontinuos, el intradós de la clave tiende a tensarse y como la mampostería tiene muy poca resistencia a tracción, prácticamente nula, aunque sean dovelas, esa zona se abre provocando un giro en la zona o punto de contacto superior y genera así lo que en métodos gráficos se denomina empuje horizontal mínimo (Emin). Los resultados que más se asemejan al método gráfico son los modelos con elementos tipo cáscara (shell) donde la discontinuidad se considera tal y como se presenta en el objeto real. Por ejemplo: al comparar las fuerzas calculadas con el método estático gráfico en el caso donde se consideró discontinuidad, carga de tierra por encima de la

bóveda y pináculo, se obtuvo un empuje horizontal mínimo de 2268.62kg (ver tabla 4), y en el mismo caso modelado con elementos finitos, se obtuvo un esfuerzo en la misma zona de 0.33kg/cm², por lo tanto, al convertirlo en fuerza, se obtiene un empuje horizontal de 2970kg (ver figura 12a), por lo tanto, el Emin calculado con métodos gráficos, para este caso en particular, tuvo una diferencia de 24% menos en magnitud que el calculado con elementos finitos, esto se debe a la redistribución de elementos mecánicos y fuerzas, debido a la continuidad de los sistemas basados en elementos tipo cascara o sólidos. Por otro lado, para determinar la línea de empuje en los modelos de elementos finitos, se seleccionó cada delta de superficie de cada elemento cascara modelado para encontrar la compresión que representa la línea de empuje con el fin de graficarla.

6. CONCLUSIONES

En sistemas estructurales homogéneos, isotrópicos, infinitamente resistentes y sin deslizamiento entre elementos, puede modelarse solo la mitad simétrica. La selección de los puntos de rotación del subsistema arco está condicionada por la configuración que tenga, haya tenido o vaya a tener la estructura. Cuantas más divisiones virtuales o reales tenga el sistema, mayor será la precisión en la determinación y conformación de las bisagras y, por tanto, mayor será la certeza en la obtención de la posición de la línea de empuje.

El tipo de suelo contribuye al comportamiento de la superestructura, ya que pueden generarse efectos de segundo orden (P-Delta), debido al posible volteo de los cimientos. La contribución de las cargas de los pináculos en la parte superior de los muros y de la tierra en la parte superior de la bóveda se traduce en una mayor estabilidad frente a los efectos de volteo en muros y cimientos, en particular la presencia de la carga de tierra reubica la línea de empuje más cerca del tercio central geométrico de seguridad en el subsistema del arco. La integración de pináculos y tierra aumentó considerablemente la relación Momento resistente / Momento de volteo.

Al comparar las líneas de empuje a compresión de los modelos gráficos y de elementos finitos, se evidencia que existen algunas diferencias, ya que los elementos finitos utilizados en estos análisis tienen continuidad en la mayoría de los modelos, debido a que la mayor parte de ellos son continuos y presentan tracciones. Se concluye que estos métodos proporcionan resultados muy particulares y algunos de ellos son similares, por lo que se recomienda utilizar los métodos como complemento y no catalogar uno sobre el otro. Por último, es importante estudiar este tipo de estructuras con análisis de elementos de contacto.

7. AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos a Jorge Fernando Zárate Martínez por su apoyo en la corrección final en inglés. Gracias también a Elizabeth Amador por facilitar el acceso al edificio. A la Unidad Académica Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Tecamachalco (ESIA UT) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), México.

8. REFERENCIAS

- Angelillo M., et al., (2014), "*Mechanics of Masonry Structures*", Editado por Maurizio Angelillo. Springer. Università di Salerno, Fisciano, Italy.
- Biblioteca Tomás Navarro Tomás, (19/10/2023), "*Escuela de Santa Catarina, Atotonilco El Grande en Hidalgo (México)*", <https://www.pinterest.com.mx/pin/334533078561349371/>
- Barlow, William Henry (1846). "*On the Existence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction*", Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 5, pp. 179-180.

- Block, P., DeJong, M., Ochsendorf, J. A. (2006), "*As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*". Nexus Network Journal - Vol 8, No. 2. <https://doi.org/10.1007/s00004-006-0015-9>.
- Chávez, Mauricio M., (2010), "*Validación Experimental De Modelos Analíticos Para El Estudio Del Comportamiento Sísmico De Estructuras Históricas*", México, UNAM, p. 24.
- Chávez, M. (2005), "*Estudio experimental de las propiedades mecánicas de mamposterías de piedra natural*", publicado por el Instituto de ingeniería UNAM. Ciudad Universitaria, CP 04510, Ciudad de México.
- Chávez, M. (2010), "*Validación experimental de modelos analíticos para el estudio del comportamiento sísmico de estructuras históricas*", publicado por el Instituto de Ingeniería UNAM. Ciudad Universitaria, CP 04510, Ciudad de México.
- Circolare, (2019), Código italiano DM 14.1. Il Ministro: Toninelli
- Durán, D., Chávez m. M. (2022), "*Mechanical properties of masonry stone samples extracted from Mexican colonial churches*", Elsevier, coordinación de ingeniería estructural, instituto de ingeniería, universidad nacional autónoma de México, México, E01295, <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e01295>
- Goodno, B. J., Gere, J. M., (2013), "*Mechanics of Materials (Ninth Edition)*", Cengage Learning, U.S., pp. 26-27.
- Mas-Guindal, A. J. (2021). "*Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban*". Munilla-Lería, España-Madrid.
- Heyman, J. (1969), "*Teoría, Historia Y Restauración De Estructuras De Fábrica*", Inst. Juan de Herrera, México, pp. 1-1
- Heyman, J. (1995), "*The Stone Skeleton Structural engineering of masonry architecture (First Publish)*", Cambridge University Press, United Kingdom, pp. 5-49.
- Hibbeler, R.C. (2016), "*Ingeniería mecánica estática (decimosegunda edición)*", Prentice Hall, Pearson Educación, México, pp. 447-456, 599.
- Huerta, S. (2004), "*Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*", Inst. Juan de Herrera, Madrid, pp. 11-34.
- Huerta, S. (2006). "*Galileo was wrong: The Geometrical Design of Masonry Arches*", E.T.S. de Arquitectura Universidad Politécnica de Madrid, Inst. Juan de Herrera, Nexus Network Journal 8 (2006), p. 26.
- ICOMOS Internacional Council of Monument and Cities. (2003). "*Principles for the analysis, conservation, and restoration of architectural heritage structures*". Victoria Falls, Zambia. Retrieved from <http://www.icomos.org>
- ISCARSAH. (2003). "*Recommendations for the analysis conservation, and structural restoration of architectural heritage*". Course on Architectural Heritage Intervention of the College of Architects of Catalonia. Catalonia: ICOMOS.
- Markou, A. A., Ruan, G. (2022), "*Graphic statics: projective funicular polygon*", ELSEVIER, Department of Civil Engineering, Aalto University, Rakentajanaukio 4A, Espoo FI-00076, Finland, pp. 1394-1395.
- Mas-Guindal, A. J. (2021). "*Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban*". Munilla-Lería, España-Madrid, pp. 34-73.
- Mc Cormac, J. C., Brown, R. H. (2017), "*Diseño de Concreto Reforzado (décima edición)*", Alfaomega Grupo Editor, México, p. 355.
- Meli, R. (1998), "*Ingeniería estructural de los edificios históricos*", ICA, México, p. 10
- Meli, R. (2011), "*Diseño Estructural (segunda edición)*", Limusa Noriega Editores, México, p. p. 544, 552.
- Minke, G. (1994), "*Manual de construcción en tierra, La tierra como material de construcción y su aplicación en la arquitectura actual*", Editorial Fin de Siglo, Alemania, p. 25.

- Popov, E. P., Toader, A. B. (1999),” *Mecánica de Sólidos (Segunda Edición) Prentice Hall*”, Pearson Educación, México, p. 4.
- Computers and Structures, Inc. (2023), “*SAP2000: Integrated Software for Structural Analysis and Design*” (Version 23.1.0).
- Segovia, M. A. (2022), “*Análisis constructivo - estructural para determinar el comportamiento de un inmueble de mampostería del siglo XVI, Santa Catarina, Atotonilco del grande*”, Tesis del IPN, México, pp. 49, 77.
- Spiegel, M. R. (1970), “*Análisis vectorial, Teoría y 480 Problemas Resueltos*”, Serie SCHAUM, U.S.A., pp. 1-4