

Nuevo modelo para el diseño completo de zapatas aisladas rectangulares tomando en cuenta que la superficie de contacto funciona parcialmente en compresión

A. Luévanos Rojas ^{1*} 

*Autor de Contacto: arnulfol_2007@hotmail.com

DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v13i2.671>

Recibido: 21/02/2023 | Correcciones recibidas: 13/04/2023 | Aceptado: 20/04/2023 | Publicado: 01/05/2023

RESUMEN

Este documento muestra un nuevo modelo para diseño completo de zapatas aisladas rectangulares bajo flexión uniaxial y biaxial, tomando en cuenta que el área de la zapata en contacto con el suelo funciona parcialmente a compresión. La metodología se presenta por integración para obtener momentos, cortantes por flexión y penetración. Los ejemplos numéricos se presentan para el diseño de zapatas aisladas rectangulares bajo flexión uniaxial y biaxial, y se comparan con el modelo actual (área total funciona en compresión) en términos de volúmenes de concreto y acero. El modelo actual muestra mayores volúmenes de concreto y acero. Por lo tanto, el nuevo modelo es el más adecuado, ya que presenta mejor control de calidad en los recursos utilizados.

Palabras clave: zapatas aisladas rectangulares; nuevo modelo para diseño completo; momentos; cortante por flexión; cortante por penetración.

Citar como: Luévanos Rojas, A. (2023), “Nuevo modelo para el diseño completo de zapatas aisladas rectangulares tomando en cuenta que la superficie de contacto funciona parcialmente en compresión”, Revista ALCONPAT, 13 (2), pp. 192 – 219, DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v13i2.671>

¹ Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias, Universidad Autónoma de Coahuila, Torreón, Coahuila, México.

Contribución de cada autor

En este trabajo solo se tuvo un autor.

Licencia Creative Commons

Los derechos de autor (2023) son propiedad de los autores. Este trabajo es un artículo de acceso abierto publicado bajo los términos y condiciones de una licencia internacional Creative Commons Attribution 4.0 International License ([CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)).

Discusiones y correcciones posteriores a la publicación

Cualquier discusión, incluyendo la réplica de los autores, se publicará en el primer número del año 2024 siempre y cuando la información se reciba antes del cierre del tercer número del año 2023.

New model for complete design of rectangular isolated footings taking into account that the contact surface works partially in compression

ABSTRACT

This paper shows a new model for complete design of rectangular isolated footings under uniaxial and biaxial bending, considering that the footing area in contact with the soil partially works to compression. The methodology is presented by integration to obtain moments, flexural shearing and punching shearing. Numerical examples are presented for design of rectangular isolated footings under uniaxial and biaxial flexion and are compared with the current model (total area works in compression) in terms of concrete and steel volumes. The current model shows greater volumes of concrete and steel. Therefore, the new model is the most appropriate, since it presents better quality control in the resources used.

Keywords: rectangular isolated footings; new model for complete design; moments; flexural shearing; punching shearing.

Um novo modelo para o dimensionamento completo de fundações isoladas retangulares levando em consideração que a superfície de contato funciona parcialmente em compressão

RESUMO

Este artigo mostra um novo modelo para o dimensionamento completo de fundações isoladas retangulares sob flexão uniaxial e biaxial, levando em consideração que a área da sapata em contato com o solo funciona parcialmente à compressão. A metodologia é apresentada por integração para obter momentos, cisalhamento por flexão e punção. Exemplos numéricos são apresentados para o projeto de fundações isoladas retangulares sob flexão uniaxial e biaxial e são comparados ao modelo atual (a área total funciona em compressão) em termos de volumes de concreto e aço. O modelo atual mostra maiores volumes de concreto e aço. Portanto, o novo modelo é o mais apropriado, pois apresenta melhor controle de qualidade nos recursos utilizados.

Palavras-chave: fundações isoladas retangulares; novo modelo para dimensionamento completo; momentos; cisalhamento de flexão; punção.

Información Legal

Revista ALCONPAT es una publicación cuatrimestral de la Asociación Latinoamericana de Control de Calidad, Patología y Recuperación de la Construcción, Internacional, A. C., Km. 6, antigua carretera a Progreso, Mérida, Yucatán, C.P. 97310, Tel.5219997385893, alconpat.int@gmail.com, Página Web: www.alconpat.org

Reserva de derechos al uso exclusivo No.04-2013-011717330300-203, eISSN 2007-6835, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derecho de Autor. Editor responsable: Dr. Pedro Castro Borges. Responsable de la última actualización de este número, Unidad de Informática ALCONPAT, Ing. Elizabeth Sabido Maldonado.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor.

La reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación se realiza en apego al código COPE y a la licencia CC BY 4.0 de la Revista ALCONPAT.

1. INTRODUCCION

El diseño de zapatas poco profundas apoyadas en el suelo depende de las cargas y los momentos proporcionados por las columnas.

La Figura 1 muestra la distribución de la presión del suelo debajo de la zapata rígida que depende del tipo de suelo, y la posición de la fuerza resultante aplicada en el centro de gravedad de la base. La Figura 1(a) presenta una base que descansa sobre suelo arenoso. La Figura 1(b) muestra una base que descansa sobre suelo arcilloso. La Figura 1(c) presenta la distribución uniforme de la presión del suelo utilizada en el diseño de actual.

La capacidad de carga ha sido investigada para las zapatas poco profundas sometidas a la flexión biaxial, que toma en cuenta una distribución lineal de la presión del suelo y esta área de contacto funciona parcialmente en compresión (Irlés-Más and Irlés-Más, 1992; Özmen, 2011; Rodríguez-Gutiérrez and Aristizabal-Ochoa, 2013a, b; Lee et al., 2015; Kaur and Kumar, 2016; Bezmalinovic Colleoni, 2016; Dagdeviren, 2016; Aydogdu, 2016; Girgin, 2017; Turedi et al., 2019; Al-Gahtani and Adekunle, 2019; Galvis and Smith-Pardo, 2020; Rawat et al., 2020; Lezgy-Nazargah et al., 2022; Gör, 2022).

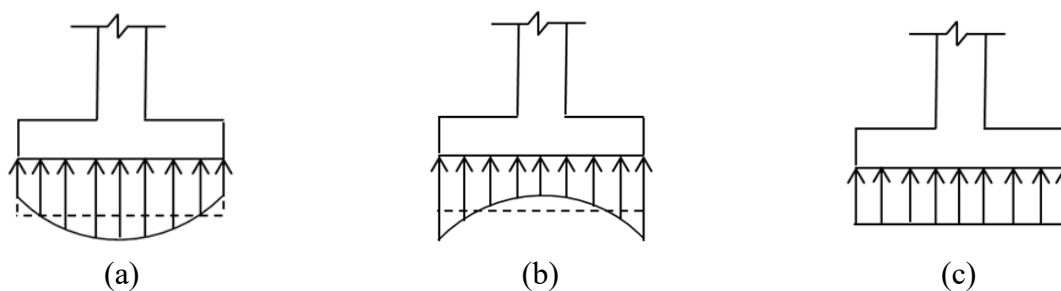


Figura 1. Distribución de la presión debajo de la zapata
Fuente: Elaboración propia

Los modelos matemáticos para el diseño de cimentaciones: para las zapatas aisladas se han desarrollado para formas cuadradas, circulares y rectangulares (Algin, 2000, 2007; Luévanos-Rojas, 2012a, b, 2013, 2014a, 2015a; Luévanos-Rojas et al., 2013, 2014b, 2016b, et al., 2017; Filho et al., 2017; López-Chavarría et al., 2017a, c, 2019; Khajehzadeh et al., 2014); Para zapatas combinadas rectangulares, trapezoidales, de esquina, en forma de T y correa (Jahanandish et al., 2012; Luévanos-Rojas, 2014c, 2015b, c, d, 2016^a, b, et al., 2018a, b, 2020; López-Chavarría et al., 2017b; Velázquez-Santillán et al., 2019; Aguilera-Mancilla et al., 2019; Yáñez-Palafox et al., 2019). Estos trabajos toman en cuenta el área total de contacto que trabaja bajo compresión.

Los modelos más cercanos a este documento son: Soto-García et al. (2022) propusieron un modelo matemático para obtener el área mínima para zapatas aisladas circulares tomando en cuenta que el área de la zapata en contacto con el suelo trabaja parcialmente a compresión, este modelo presenta un caso porque el análisis se desarrolla para el momento resultante. Vela-Moreno et al. (2022) desarrollaron un modelo matemático para encontrar la superficie mínima para zapatas aisladas rectangulares tomando en cuenta que el área de la zapata en contacto con el suelo trabaja parcialmente a compresión, este modelo muestra cinco casos para flexión biaxial, dos para flexión uniaxial (la carga está en el eje X) y otros dos para flexión uniaxial (la carga está en el eje Y). Kim-Sánchez et al. (2022) presentaron un modelo matemático para obtener el espesor y las áreas de acero transversal y longitudinal para zapatas aisladas circulares tomando en cuenta que el área de la zapata en contacto con el suelo trabaja parcialmente a compresión.

Esta investigación presenta un nuevo modelo analítico para obtener un diseño completo (espesores y áreas de acero transversal y longitudinal) para zapatas aisladas rectangulares, tomando en cuenta que el área de la zapata en contacto con el suelo trabaja parcialmente a compresión, este modelo se

basa en el área de contacto con el suelo (lados de la zapata) del modelo propuesto por Vela-Moreno et al. (2022). La formulación del nuevo modelo se desarrolla por integración para encontrar los momentos, los cortantes por flexión y los cortantes por penetración bajo los criterios del código (ACI 318S-19). Otros autores presentan las ecuaciones para encontrar el diseño completo de una zapata aislada rectangular, pero consideran la superficie total trabajando a compresión. Los ejemplos numéricos se muestran para encontrar el diseño completo de zapatas aisladas rectangulares bajo carga axial y momentos en una y dos direcciones, y se comparan los resultados con los de otros autores para observar las diferencias. Las áreas de contacto con el suelo presentadas en este documento se basan en el trabajo propuesto por Vela-Moreno et al. (2022). Este modelo tendrá su impacto en la industria de la construcción con menores costos (materiales y mano de obra).

2. FORMULACION DEL NUEVO MODELO

Una zapata aislada rectangular rígida se deforma en forma plana, es decir, la distribución de la presión del suelo debajo de la zapata se considera lineal.

La ecuación general para cualquier zapata sujeta a flexión biaxial bajo una carga axial factorizada y dos momentos ortogonales factorizados es:

$$\sigma_u(x, y) = \frac{P_u}{h_x h_y} + \frac{12M_{ux}y}{h_x h_y^3} + \frac{12M_{uy}x}{h_x^3 h_y} \quad (1)$$

donde: σ_u es la presión factorizada que genera el suelo debido a la carga axial factorizada y los momentos factorizados que se aplican en la zapata, P_u es la carga axial factorizada, M_{ux} es el momento factorizado en el eje X, M_{uy} es el momento factorizado en el eje Y, h_x y h_y son los lados de la zapata, x y y son las coordenadas donde se ubica la presión generada por el suelo.

La ecuación de flexión biaxial se puede aplicar cuando la fuerza resultante P_u está ubicada dentro del núcleo central (área trabajando completamente en compresión), y cuando la fuerza resultante P_u está fuera del núcleo central (área trabajando parcialmente en compresión) no es válida.

Cuando la fuerza resultante P_u está fuera del núcleo central, las ecuaciones generales de la presión del suelo bajo la zapata sujeta a flexión uniaxial y biaxial son:

Flexión uniaxial (P_u se ubica sobre el eje Y):

$$\sigma_z(x, y) = \frac{\sigma_{umax}(2h_{y1} - h_y + 2y)}{2h_{y1}} \quad (2)$$

Flexión uniaxial (P_u se ubica sobre el eje X):

$$\sigma_z(x, y) = \frac{\sigma_{umax}(2h_{x1} - h_x + 2x)}{2h_{x1}} \quad (3)$$

Flexión biaxial:

$$\sigma_z(x, y) = \frac{\sigma_{umax}[h_{y1}(2x - h_x) + h_{x1}(2y - h_y) + 2h_{x1}h_{y1}]}{2h_{x1}h_{y1}} \quad (4)$$

donde: σ_{umax} es la presión máxima factorizada generada por el suelo debido a la carga axial factorizada y los momentos factorizados que se aplican en la zapata.

Las secciones críticas para los momentos se ubican en los ejes $a-a$ y $b-b$, para las secciones críticas para los cortantes por flexión se ubican en los ejes $c-c$ y $e-e$, y la sección crítica para el cortante por penetración o punzonamiento se presenta en el perímetro formado por los puntos 5, 6, 7 y 8 (ACI 318S-19).

2.1. Zapata aislada rectangular sometida a flexión uniaxial

La Figura 2 muestra los cuatro casos posibles para obtener el área mínima de una zapata aislada rectangular sometida a flexión uniaxial. Dos casos cuando P se ubica en el eje Y: 1) cuando P se ubica dentro del núcleo central; 2) cuando P se encuentra fuera del núcleo central. Dos casos cuando P se ubica en el eje X: 1) cuando P se ubica dentro del núcleo central; 2) cuando P se encuentra fuera del núcleo central.

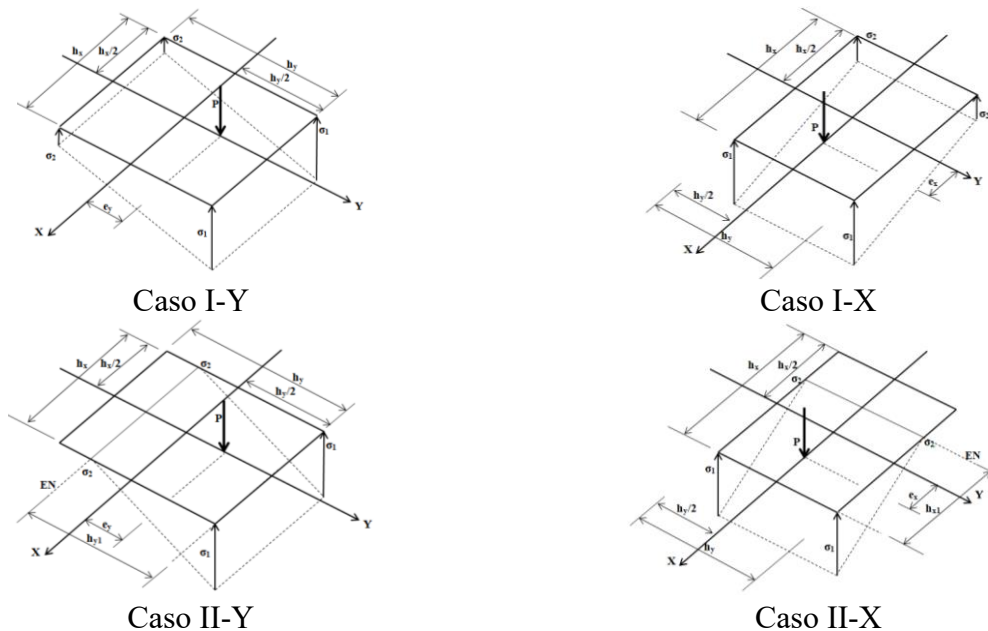


Figura 2. Cuatro casos posibles de area mínima para flexión uniaxial
Fuente: Elaboración propia a partir de Vela-Moreno et al. (2022)

La Figura 3 muestra las secciones críticas para momentos y cortantes de flexión de cuatro casos posibles: Caso I-Y cuando P se ubica en el eje Y, y dentro del núcleo central. Caso II-Y cuando P se ubica en el eje Y, y fuera del núcleo central: Caso II-YA cuando el eje neutro se ubica $h_y/2 - h_{y1} \geq c_1/2$ (momento) y $h_y/2 - h_{y1} \geq c_1/2 + d$ (cortante por flexión); Caso II-YB cuando el eje neutro se localiza $h_y/2 - h_{y1} \leq c_1/2$ (momento) y $h_y/2 - h_{y1} \leq c_1/2 + d$ (cortante por flexión). Caso I-X cuando P se localiza en el eje X, y dentro del núcleo central. Caso II-X cuando P se ubica en el eje X, y fuera del núcleo central; Caso II-XA cuando el eje neutro está localizado $h_x/2 - h_{x1} \geq c_2/2$ (momento) y $h_x/2 - h_{x1} \geq c_2/2 + d$ (cortante por flexión); Caso II-XB cuando el eje neutro está localizado $h_x/2 - h_{x1} \leq c_2/2$ (momento) y $h_x/2 - h_{x1} \leq c_2/2 + d$ (cortante por flexión).

2.1.1. Cortantes por flexión y momentos

Las ecuaciones generales en los ejes “c” y “e” para los cortantes por flexión factorizados “ V_{uc} ” y “ V_{ue} ”, y en los ejes “a” y “b” para los momentos factorizados “ M_{ua} ” y “ M_{ub} ” son:

Caso I-Y

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_u(x, y) dx dy \tag{5}$$

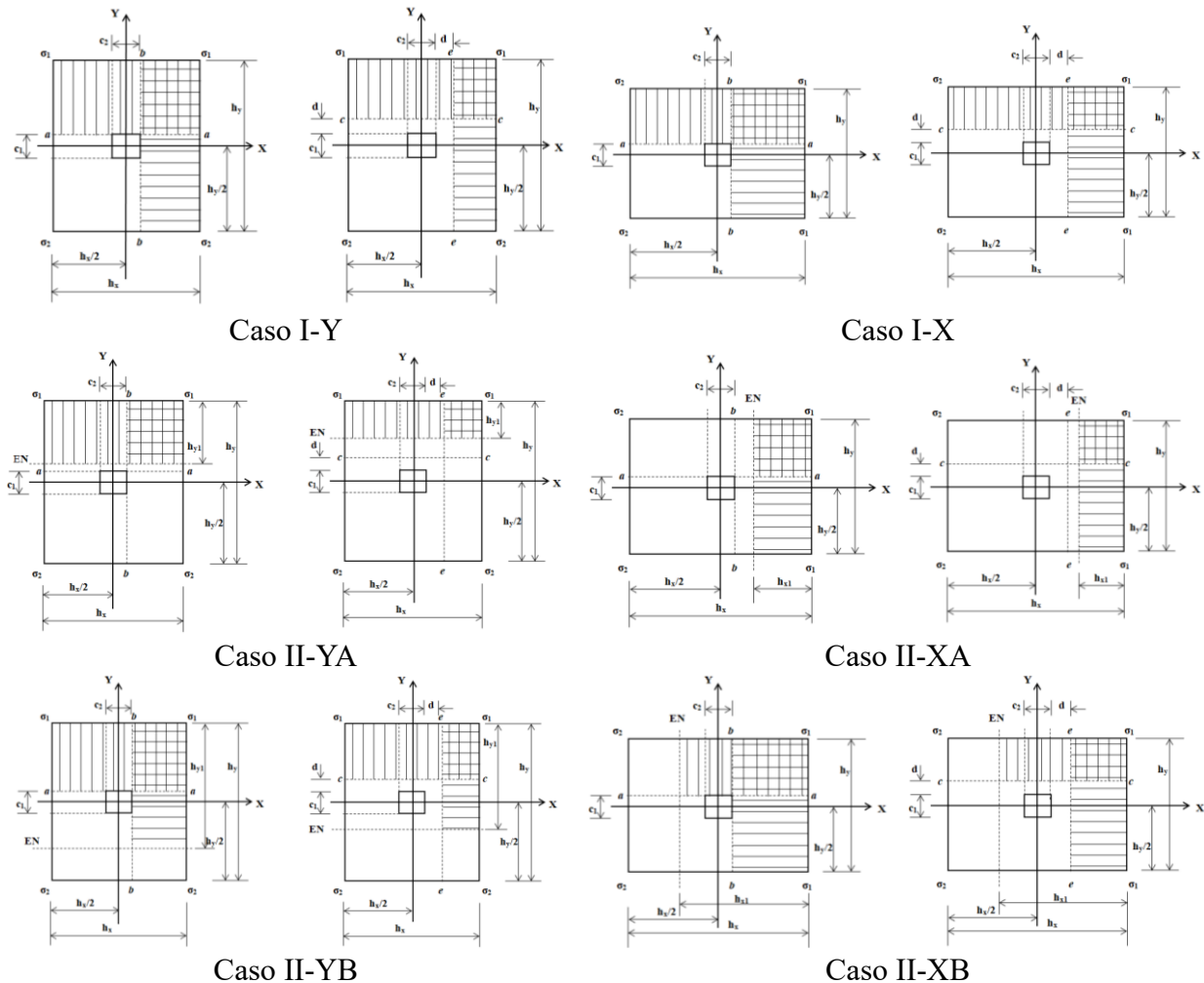
$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_u(x, y) dy dx \tag{6}$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_u(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \tag{7}$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_u(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx \tag{8}$$

donde: d es la peralte efectivo de la zapata, c_1 y c_2 son los lados de la columna.

Nota: la ecuación (1) se sustituye en las ecuaciones (5) a (8) y $M_{uy} = 0$, y se desarrollan las integrales para obtener las ecuaciones finales.



Momentos Cortantes por flexion Momentos Cortantes por flexion

Figura 3. Momentos y cortantes por flexión para flexión uniaxial

Fuente: Elaboración propia

Caso II-YA

Para $h_y/2 - h_{y1} \geq c_1/2 + d$ (cortante por flexión) y $h_y/2 - h_{y1} \geq c_1/2$ (momento) son:

$$V_{uc} = \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \tag{9}$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \tag{10}$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \tag{11}$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx \tag{12}$$

Caso II-YB

Para $h_y/2 - h_{y1} \leq c_1/2 + d$ (cortante por flexión) y $h_y/2 - h_{y1} \leq c_1/2$ (momento) son:

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \tag{13}$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \tag{14}$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \tag{15}$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx \tag{16}$$

Nota: la ecuación (2) se sustituye en las ecuaciones (9) a (16) y se desarrollan las integrales para obtener las ecuaciones finales.

Caso I-X

Las ecuaciones generales en los ejes “c” y “e” para los cortantes por flexión factorizados “ V_{uc} ” y “ V_{ue} ”, y en los ejes “a” y “b” para los momentos factorizados “ M_{ua} ” y “ M_{ub} ” son las ecuaciones (5) a (8). Pero en estas ecuaciones se sustituye $M_{ux} = 0$ y se desarrollan las integrales para obtener las ecuaciones finales.

Caso II-XA

Para $h_x/2 - h_{x1} \geq c_2/2 + d$ (cortante por flexión) y $h_x/2 - h_{x1} \geq c_2/2$ (momento) son:

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (17)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (18)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \quad (19)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx \quad (20)$$

Caso II-XB

Para $h_x/2 - h_{x1} \leq c_2/2 + d$ (cortante por flexión) y $h_x/2 - h_{x1} \leq c_2/2$ (momento) son:

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (21)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (22)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \quad (23)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx \quad (24)$$

Nota: la ecuación (3) se sustituye en las ecuaciones (17) a (24) y se desarrollan las integrales para obtener las ecuaciones finales.

2.1.2. Cortantes por penetración o punzonamiento

La Figura 4 muestra las secciones críticas para cortantes por punzonamiento de cuatro casos posibles: Caso I-Y cuando P se ubica en el eje Y, y dentro del núcleo central. Caso II-Y cuando P se ubica en el eje Y, y fuera del núcleo central: Caso II-YA cuando el eje neutro se ubica $h_y/2 - h_{y1} \geq c_1/2 + d/2$; Caso II-YB cuando el eje neutro se localiza $h_y/2 - h_{y1} \leq c_1/2 + d/2$. Caso I-X cuando P se localiza en el eje X, y dentro del núcleo central. Caso II-X cuando P se localiza en el eje X, y fuera del núcleo central: Caso II-XA cuando el eje neutro se localiza $h_x/2 - h_{x1} \geq c_2/2 + d/2$; Caso II-XB cuando el eje neutro se localiza $h_x/2 - h_{x1} \leq c_2/2 + d/2$.

La ecuación general para el cortante por punzonamiento factorizado “ V_{up} ” es:

Caso I-Y

$$V_{up} = P_u - \int_{-\frac{c_1-d}{2}}^{\frac{c_1+d}{2}} \int_{-\frac{c_2-d}{2}}^{\frac{c_2+d}{2}} \sigma_u(x,y) dx dy \quad (25)$$

Nota: la ecuación (1) se sustituye en la ecuación (25) y $M_{uy} = 0$, y se desarrolla la integral para obtener la ecuación final.

Caso II-YA

Para $h_y/2 - h_{yl} \geq c_1/2 + d/2$ es:

$$V_{up} = P_u \quad (26)$$

Caso II-YB

Para $h_y/2 - h_{yl} \leq c_1/2 + d/2$ es:

$$V_{up} = P_u - \int_{y_s}^{\frac{c_1+d}{2}} \int_{-\frac{c_2-d}{2}}^{\frac{c_2+d}{2}} \sigma_z(x,y) dx dy \quad (27)$$

donde: $-c_1/2 - d/2 \leq y_s \leq c_1/2 + d/2$

Nota: la ecuación (2) se sustituye en la ecuación (27) y se desarrolla la integral para obtener la ecuación final.

Caso I-X

La ecuación (1) se sustituye en la ecuación (25) y $M_{ux} = 0$ y se desarrolla la integral para obtener la ecuación final.

Caso II-XA

Para $h_x/2 - h_{xl} \geq c_2/2 + d/2$ es la ecuación (26).

Caso II-XB

Para $h_x/2 - h_{xl} \leq c_2/2 + d/2$ es:

$$V_{up} = P_u - \int_{x_s}^{\frac{c_2+d}{2}} \int_{-\frac{c_1-d}{2}}^{\frac{c_1+d}{2}} \sigma_z(x,y) dy dx \quad (28)$$

donde: $-c_2/2 - d/2 \leq x_s \leq c_2/2 + d/2$.

Nota: la ecuación (3) se sustituye en la ecuación (28) y se desarrolla la integral para obtener la ecuación final.

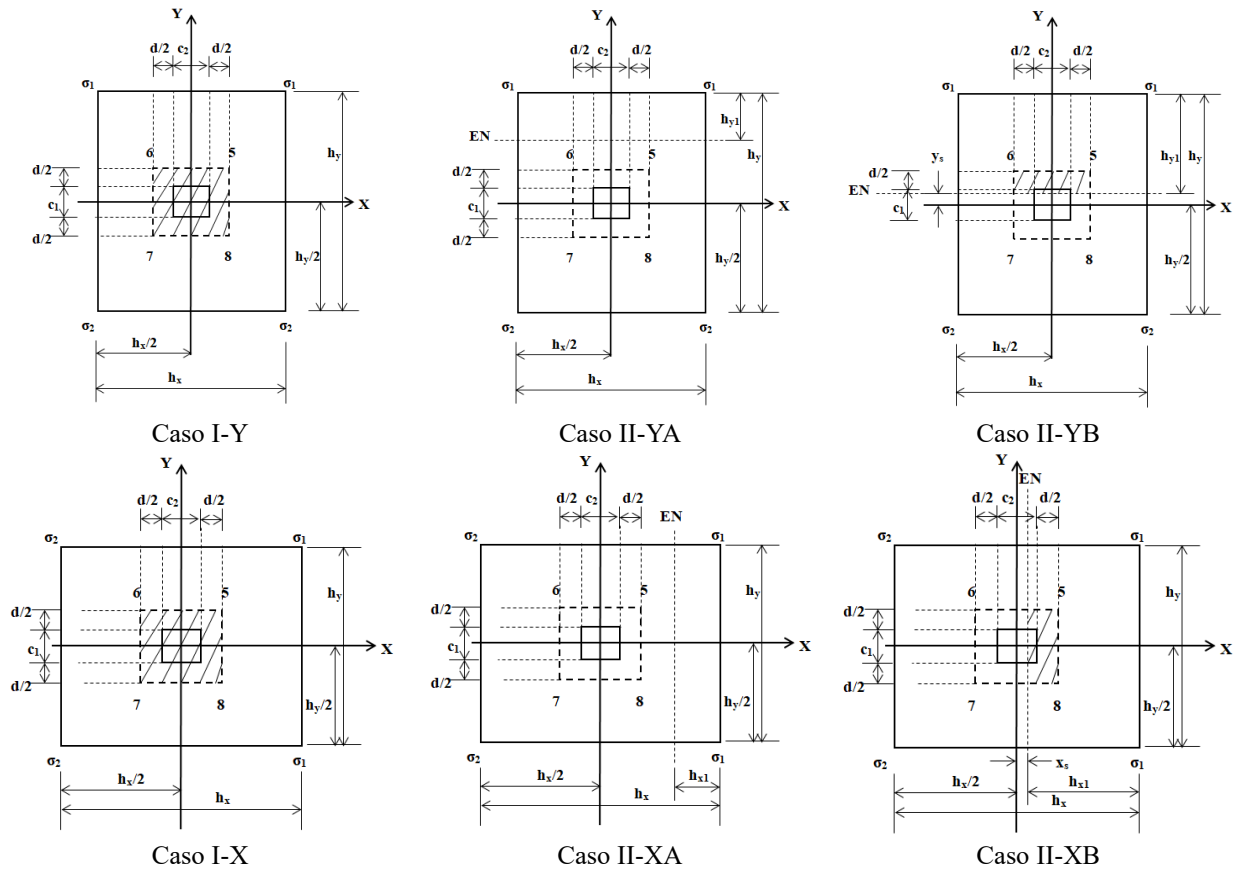


Figura 4. Cortantes por punzonamiento para flexión uniaxial
Fuente: Elaboración propia

2.2. Zapata aislada rectangular sometida a flexión biaxial

La Figura 5 muestra los cinco casos posibles para obtener el área mínima de una zapata aislada rectangular sometida a flexión biaxial.

Para el caso I, se considera que la superficie total de la zapata trabaja a compresión. La presión generada por el suelo sobre la zapata se obtiene mediante la ecuación (1) (flexión biaxial).

Para los casos II, III, IV y V, se consideran que la superficie total de la zapata trabaja parcialmente a compresión, es decir, parte de la superficie tiene presión cero. La presión generada por el suelo sobre la zapata se obtiene mediante la ecuación (4).

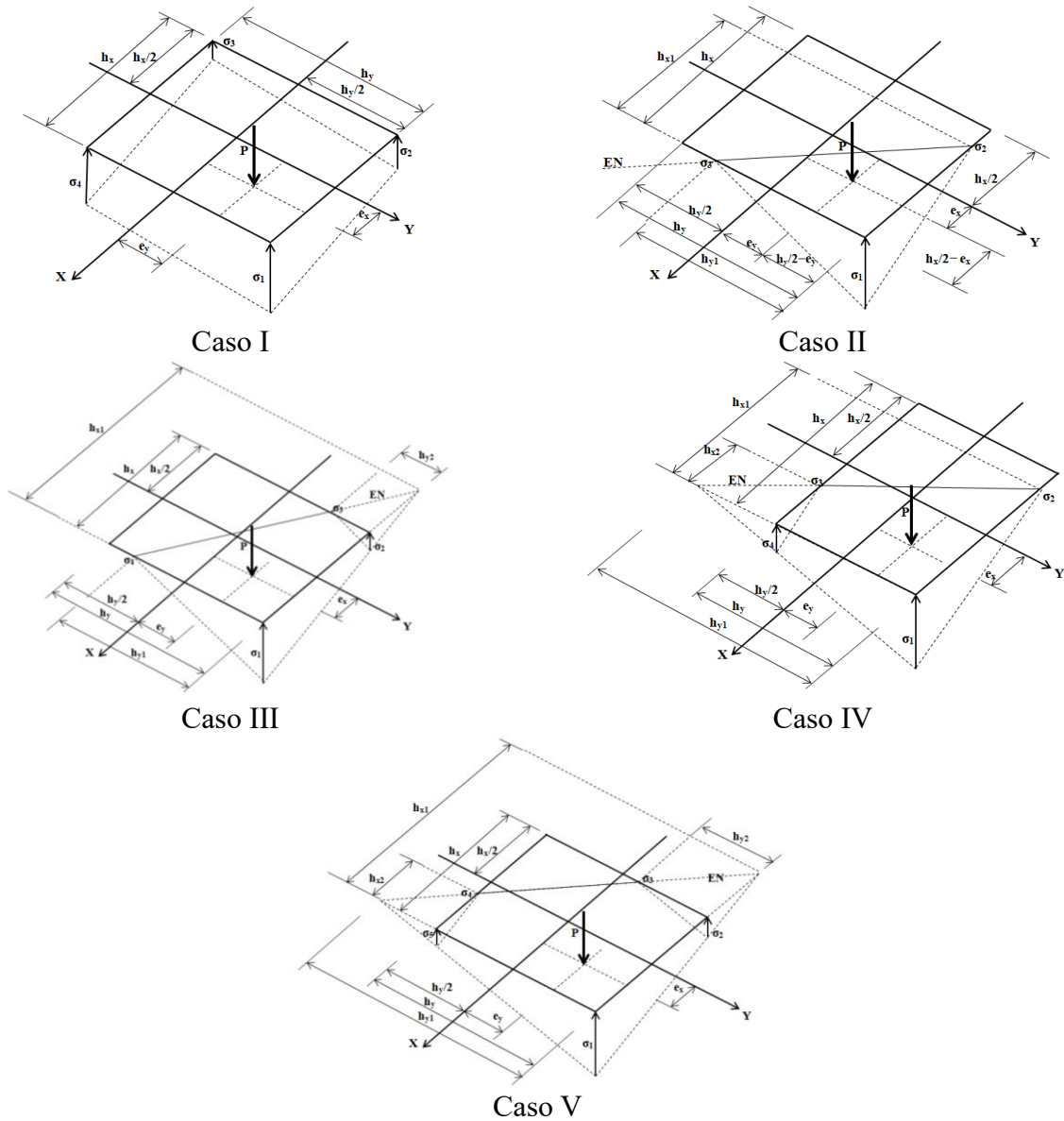


Figura 5. Cinco casos posibles de area mínima para flexión biaxial
 Fuente: Elaboración propia a partir de Vela-Moreno et al. (2022)

2.2.1. Cortantes por flexión y momentos

La Figura 6 muestra las secciones críticas para momentos y cortantes por flexión para todos los casos posibles.

Las ecuaciones generales en los ejes “c” y “e” para los cortantes por flexión factorizados “ V_{uc} ” y “ V_{ue} ”, en los ejes “a” y “b” para los momentos factorizados “ M_{ua} ” y “ M_{ub} ” son:

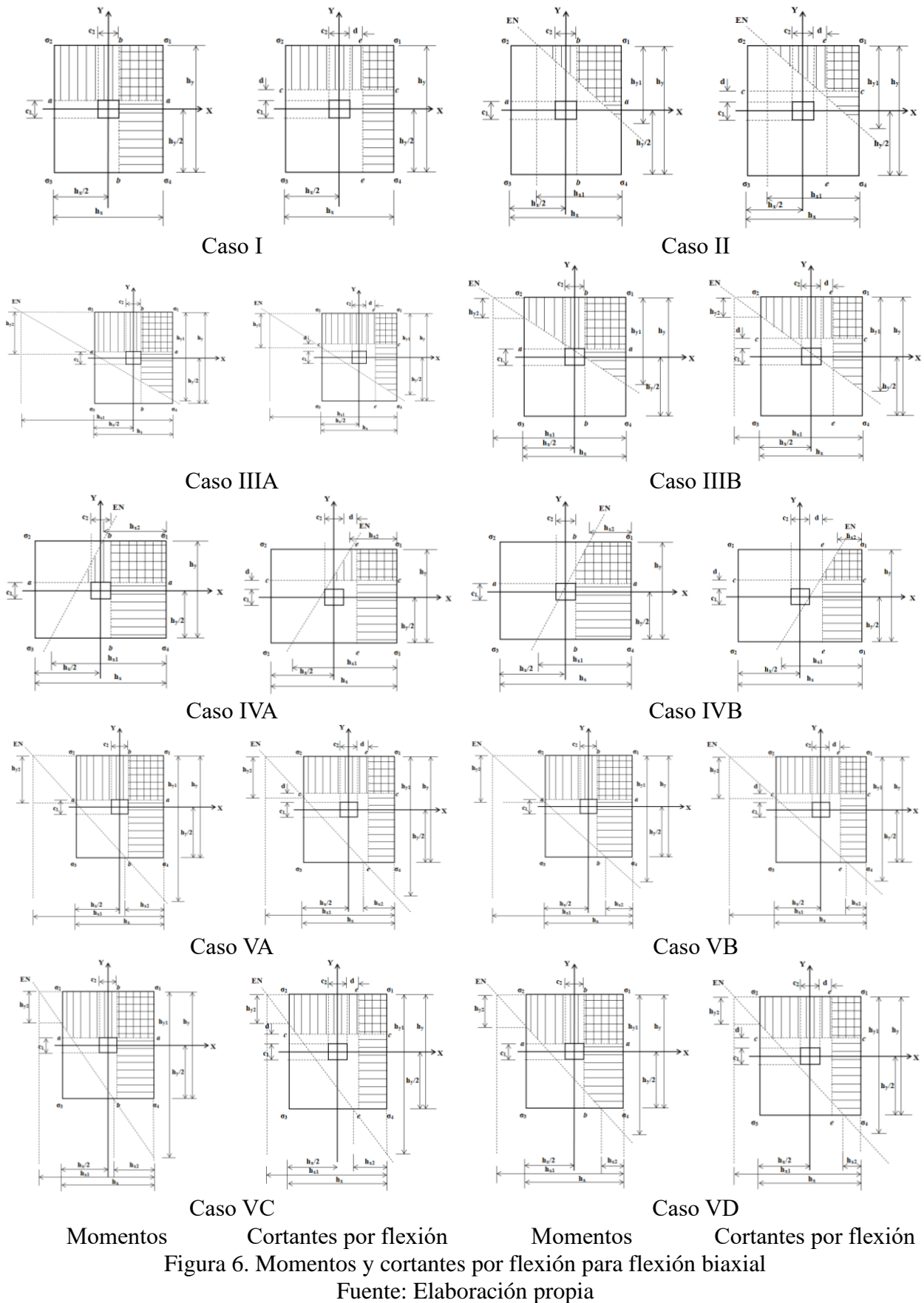


Figura 6. Momentos y cortantes por flexión para flexión biaxial

Fuente: Elaboración propia

Caso I

Cuando P se ubica dentro del núcleo central.

La ecuación (1) se sustituye en las ecuaciones (5) a (8) y se desarrollan las integrales para obtener las ecuaciones finales.

Caso II

Cuando P se ubica fuera del núcleo central.

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \tag{29}$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \tag{30}$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \tag{31}$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx \tag{32}$$

Caso III

Cuando P se ubica fuera del núcleo central de dos casos posibles: Caso IIIA cuando el eje neutro se ubica $h_y/2 - h_{y2} \leq c_1/2$ (momento) y $h_y/2 - h_{y2} \leq c_1/2 + d$ (cortante por flexión); Caso IIIB cuando el eje neutro se localiza $h_y/2 - h_{y2} \geq c_1/2$ (momento) y $h_y/2 - h_{y2} \geq c_1/2 + d$ (cortante por flexión).

Caso IIIA

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \tag{33}$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \tag{34}$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \tag{35}$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx \tag{36}$$

Caso IIIB

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}-h_{y2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy + \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (37)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (38)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}-h_{y2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2}\right) dx dy + \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2}\right) dx dy \quad (39)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2}\right) dy dx \quad (40)$$

donde: $h_{y2} = h_{y1}(h_{x1} - h_x)/h_{x1}$.

Caso IV

Cuando P se ubica fuera del núcleo central de dos casos posibles: Caso IVA cuando el eje neutro se ubica $h_x/2 - h_{x2} \leq c_2/2$ (momento) y $h_x/2 - h_{x2} \leq c_2/2 + d$ (cortante por flexión); Caso IVB cuando el eje neutro está localizado $h_x/2 - h_{x2} \geq c_2/2$ (momento) y $h_x/2 - h_{x2} \geq c_2/2 + d$ (cortante por flexión).

Caso IVA

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (41)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (42)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2}\right) dx dy \quad (43)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2}\right) dy dx \quad (44)$$

Caso IVB

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (45)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2} - h_{x2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx + \int_{\frac{h_x}{2} - h_{x2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (46)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \quad (47)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2} - h_{x2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx + \int_{\frac{h_x}{2} - h_{x2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2} \right) dy dx \quad (48)$$

donde: $h_{x2} = h_{x1}(h_{y1} - h_y)/h_{y1}$.

Caso V

Cuando P se ubica fuera del núcleo central de cuatro casos posibles: Caso VA cuando el eje neutro se ubica $h_y/2 - h_{y2} \leq c_1/2 + d$ y $h_x/2 - h_{x2} \leq c_2/2 + d$ (cortante por flexión), y $h_y/2 - h_{y2} \leq c_1/2$ y $h_x/2 - h_{x2} \leq c_2/2$ (momento); Caso VB cuando el eje neutro está localizado $h_y/2 - h_{y2} \leq c_1/2 + d$ y $h_x/2 - h_{x2} \geq c_2/2 + d$ (cortante por flexión), y $h_y/2 - h_{y2} \leq c_1/2$ y $h_x/2 - h_{x2} \geq c_2/2$ (momento); Caso VC cuando el eje neutro está localizado $h_y/2 - h_{y2} \geq c_1/2 + d$ y $h_x/2 - h_{x2} \leq c_2/2 + d$ (cortante por flexión), y $h_y/2 - h_{y2} \geq c_1/2$ y $h_x/2 - h_{x2} \leq c_2/2$ (momento); Caso VD cuando el eje neutro está localizado $h_y/2 - h_{y2} \geq c_1/2 + d$ y $h_x/2 - h_{x2} \geq c_2/2 + d$ (cortante por flexión) y $h_y/2 - h_{y2} \geq c_1/2$ y $h_x/2 - h_{x2} \geq c_2/2$ (momento).

Caso VA

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (49)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (50)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2} \right) dx dy \quad (51)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2}\right) dydx \quad (52)$$

Caso VB

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (53)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}-h_{x2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx + \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (54)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2}\right) dx dy \quad (55)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}-h_{x2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2}\right) dy dx + \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2}\right) dy dx \quad (56)$$

Caso VC

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}-h_{y2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy + \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (57)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (58)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}-h_{y2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2}\right) dx dy + \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2}\right) dx dy \quad (59)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2}\right) dy dx \quad (60)$$

Caso VD

$$V_{uc} = \int_{\frac{c_1}{2}+d}^{\frac{h_y}{2}-h_{y2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy + \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (61)$$

$$V_{ue} = \int_{\frac{c_2}{2}+d}^{\frac{h_x}{2}-h_{x2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx + \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (62)$$

$$M_{ua} = \int_{\frac{c_1}{2}}^{\frac{h_y}{2}-h_{y2}} \int_{\frac{h_x}{2} + \frac{h_{x1}(h_y-2y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2}\right) dx dy + \int_{\frac{h_y}{2}-h_{y2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \sigma_z(x, y) \left(y - \frac{c_1}{2}\right) dx dy \quad (63)$$

$$M_{ub} = \int_{\frac{c_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}-h_{x2}} \int_{\frac{h_y}{2} + \frac{h_{y1}(h_x-2x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2}\right) dy dx + \int_{\frac{h_x}{2}-h_{x2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \sigma_z(x, y) \left(x - \frac{c_2}{2}\right) dy dx \quad (64)$$

Nota: la ecuación (4) se sustituye en las ecuaciones (29) a (64) y se desarrollan las integrales para obtener las ecuaciones finales.

2.2.2. Cortantes por penetración o punzonamiento

La Figura 7 muestra las secciones críticas por punzonamiento de seis posibles casos (Perímetro crítico formado por los puntos 5, 6, 7 y 8).

Para el caso I se considera que la superficie total de la zapata trabaja a compresión. La presión generada por el suelo sobre la zapata se obtiene mediante la ecuación (1) (flexión biaxial).

Para los casos II, III, IV, V y VI se consideran que la superficie total de la zapata trabaja parcialmente a compresión, es decir, parte de la superficie tiene presión cero. La presión generada por el suelo sobre la zapata se obtiene mediante la ecuación (4).

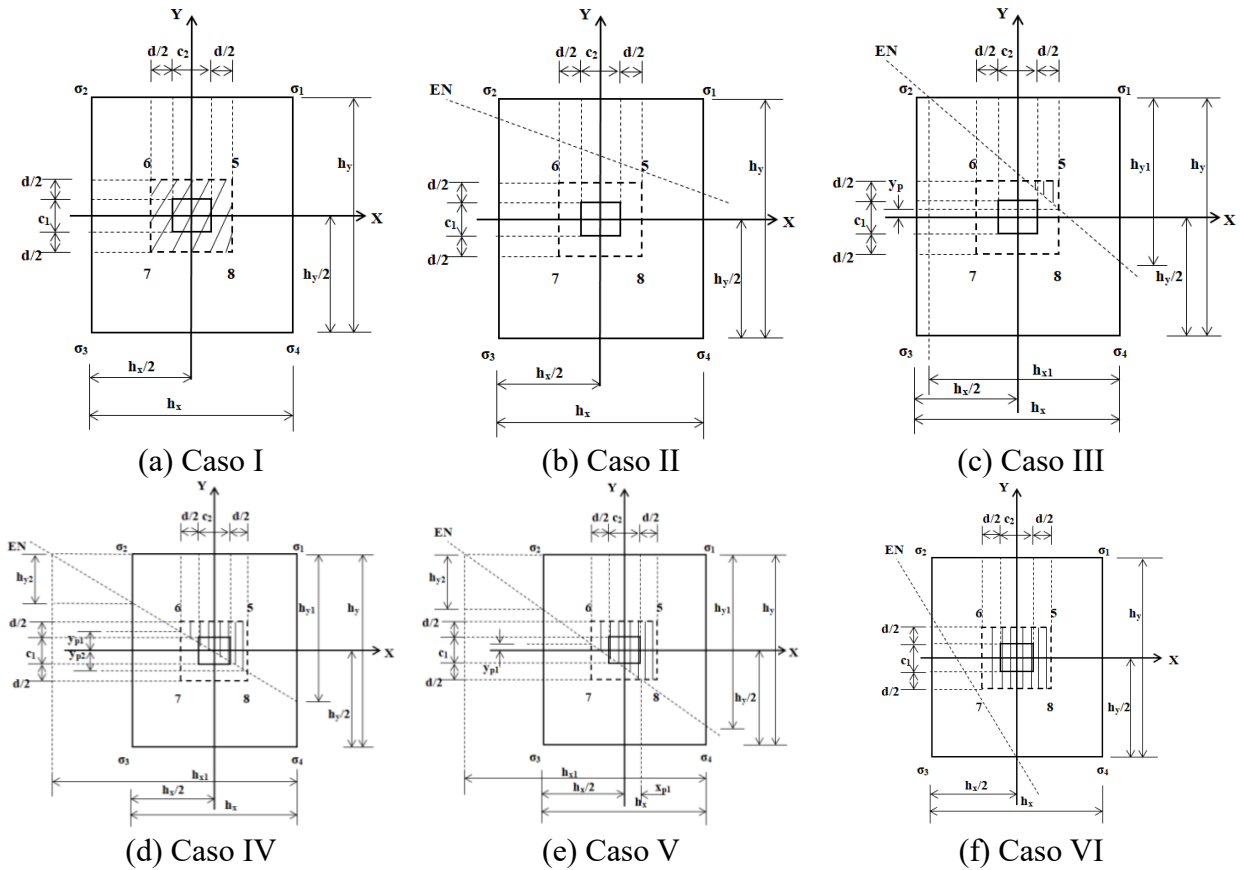


Figura 7. Cortantes por punzonamiento para flexión biaxial

Fuente: Elaboración propia

La ecuación general para el cortante por punzonamiento factorizado “ V_{up} ” es:

Caso I

La ecuación (1) se sustituye en la ecuación (25) y se desarrolla la integral para obtener la ecuación final.

Caso II

El eje neutro no alcanza el perímetro de la sección crítica, por lo tanto, es la ecuación (26).

Caso III

$$V_{up} = P_u - \int_{y_p}^{\frac{c_1+d}{2}} \int_{\frac{h_x}{2} - \frac{h_{x1}(2y-h_y)}{2h_{y1}} - h_{x1}}^{\frac{c_2+d}{2}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (65)$$

donde: $y_p = h_y/2 - h_{y1}(c_2 + d - h_x)/2h_{x1} - h_{y1}$ (Si el eje neutro cruza el perímetro crítico por el lado formado por los puntos 5 y 8) y $y_p = -c_1/2 - d/2$ (Si el eje neutro cruza el perímetro crítico por el lado formado por los puntos 7 y 8).

Caso IV

$$V_{up} = P_u - \int_{-\frac{c_2-d}{2}}^{\frac{c_2+d}{2}} \int_{\frac{h_y}{2} - \frac{h_{y1}(2x-h_x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{y_{p1}} \sigma_z(x, y) dy dx - \int_{-\frac{c_2-d}{2}}^{\frac{c_2+d}{2}} \int_{y_{p1}}^{\frac{c_1+d}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (66)$$

donde: $y_{p1} = h_y/2 + h_{y1}(c_2 + d + h_x)/2h_{x1} - h_{y1}$.

Caso V

$$V_{up} = P_u - \int_{-\frac{c_2-d}{2}}^{x_{p1}} \int_{\frac{h_y}{2} - \frac{h_{y1}(2x-h_x)}{2h_{x1}} - h_{y1}}^{y_{p1}} \sigma_z(x, y) dy dx - \int_{-\frac{c_2-d}{2}}^{\frac{c_2+d}{2}} \int_{y_{p1}}^{\frac{c_1+d}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx - \int_{x_{p1}}^{\frac{c_2+d}{2}} \int_{-\frac{c_1-d}{2}}^{y_{p1}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (67)$$

donde: $x_{p1} = h_x/2 - h_{x1}(c_1 + d - h_y)/2h_{y1} - h_{x1}$ y $y_{p1} = h_y/2 + h_{y1}(c_2 + d + h_x)/2h_{x1} - h_{y1}$.

Caso VI

$$V_{up} = P_u - \int_{-\frac{c_2-d}{2}}^{\frac{c_2+d}{2}} \int_{-\frac{c_1-d}{2}}^{\frac{c_1+d}{2}} \sigma_z(x, y) dy dx \quad (68)$$

donde: $x_{p1} = h_x/2 - h_{x1}(c_1 + d - h_y)/2h_{y1} - h_{x1}$ y $y_{p1} = h_y/2 + h_{y1}(c_2 + d + h_x)/2h_{x1} - h_{y1}$.

Nota: La ecuación (4) se sustituye en las ecuaciones (65) a (68) y se desarrolla la integral para obtener las ecuaciones finales.

3. RESULTADOS

En este apartado se describe la aplicación del nuevo modelo presentado en este documento, utilizando los mismos ejemplos para obtener el área mínima y los lados de una zapata aislada rectangular propuesta por Vela-Moreno et al., (2022).

En las Tablas 1 y 2 se presentan los cuatro casos para obtener el diseño completo de las zapatas aisladas rectangulares sometidas a flexión uniaxial. Dos casos cuando la carga axial se encuentra sobre el eje Y: Caso I-Y, cuando toda el área de contacto trabaja a compresión; Caso II-Y, cuando el área de contacto trabaja parcialmente en compresión. Dos casos cuando la carga axial se encuentra sobre el eje X: Caso I-X, cuando toda el área de contacto trabaja a compresión; Caso II-X, cuando el área de contacto trabaja parcialmente en compresión.

La Tabla 1 muestra los resultados para c_1 y $c_2 = 0.40$ m, $P_u = 720$ kN, $M_{ux} = 360, 720, 1440, 2160$ kN-m, $M_{uy} = 0$ kN-m y $\sigma_{umax} = 250$ kN/m².

El procedimiento utilizado es el siguiente:

Para el caso I-Y: Sustituyendo P_u , M_{ux} , $M_{uy} = 0$, h_x , h_y en la ecuación (1), y posteriormente se sustituye la ecuación (1), h_x , h_y , c_1 , c_2 y d en las ecuaciones (5) a (8) y (25).

Para el caso II-Y: Sustituyendo σ_{umax} , h_y , h_{y1} en la ecuación (2), y posteriormente se sustituye la ecuación (2), h_x , h_y , h_{y1} , c_1 , c_2 y d en las ecuaciones (9) a (12) o (13) a (16), y (26) o (27) según sea el caso.

El valor de d se fija por las ecuaciones propuestas por (ACI 318S-19).

Tabla 1. Diseño completo de la zapata cuando la carga axial se encuentra en el eje Y.
(Fuente: Elaboración propia)

Caso	M _{ux} kN-m	h _x m	h _y m	d cm	M _{ua} kN-m	M _{ub} kN-m	V _{uc} kN	V _{ue} kN	V _{up} kN	A _{smy} cm ²	A _{sminy} cm ²	A _{spy} cm ²	A _{smx} cm ²	A _{sminx} cm ²	A _{spx} cm ²
I-Y	360	1.00	3.65	52	410.97	32.40	342.89	*	553.04	22.00	17.32	22.80 (8Ø3/4")	1.65	63.20	65.55 (23Ø3/4")
II-Y		1.33	3.00	32	240.38	40.54	272.63	54.38	655.20	21.10	14.17	22.80 (8Ø3/4")	3.37	31.97	34.20 (12Ø3/4")
I-Y	720	1.00	6.00	67	794.45	32.40	420.46	*	582.61	33.32	22.31	34.20 (12Ø3/4")	1.28	133.87	136.89 (27Ø1")
II-Y		1.00	4.67	52	468.41	22.50	322.24	*	631.92	25.28	17.32	25.65 (9Ø3/4")	1.15	80.87	81.12 (16Ø1")
I-Y	1440	2.00	12.00	42	1693.21	115.20	500.88	136.80	699.83	130.51	27.97	131.82 (26Ø1")	7.27	167.83	172.38 (34Ø1")
II-Y		2.00	5.33	42	894.98	80.00	499.75	95.00	720.00	61.71	27.97	65.91 (13Ø1")	5.05	74.55	76.95 (27Ø3/4")
I-Y	2160	2.00	18.00	52	2592.81	115.20	510.05	100.80	703.07	161.36	34.63	162.24 (32Ø1")	5.87	311.69	314.34 (62Ø1")
II-Y		2.00	7.33	37	1268.16	80.00	350.12	107.50	720.00	109.86	24.64	111.54 (22Ø1")	5.73	90.31	91.20 (32Ø3/4")

donde: A_{smy} y A_{smx} son las áreas de acero generadas por los momentos en los ejes *a* (dirección Y) y *b* (dirección X), A_{sminy} y A_{sminx} son las áreas de acero mínimas en ambas direcciones, A_{spy} y A_{spx} son las áreas de acero propuestas en las direcciones Y y X (ACI 318S-19). * El eje se ubica fuera del área de la zapata.

La Tabla 2 muestra los resultados para c₁ y c₂ = 0.40 m, P_u = 720 kN, M_{ux} = 0 kN-m, M_{uy} = 360, 720, 1440, 2160 kN-m y σ_{umax} = 250 kN/m² (mismo procedimiento utilizado en la Tabla 1, pero con las ecuaciones correspondientes).

Tabla 2. Diseño completo de la zapata cuando la carga axial se encuentra en el eje X.
(Fuente: Elaboración propia)

Caso	M _{uy} kN-m	h _x m	h _y m	d cm	M _{ua} kN-m	M _{ub} kN-m	V _{uc} kN	V _{ue} kN	V _{up} kN	A _{smy} cm ²	A _{sminy} cm ²	A _{spy} cm ²	A _{smx} cm ²	A _{sminx} cm ²	A _{spx} cm ²
I-X	360	3.65	1.00	52	32.40	410.97	*	342.89	553.04	1.65	63.20	65.55 (23Ø3/4")	22.00	17.32	22.80 (8Ø3/4")
II-X		3.00	1.33	32	40.54	240.38	54.38	272.63	655.20	3.37	31.97	34.20 (12Ø3/4")	21.10	14.17	22.80 (8Ø3/4")
I-X	720	6.00	1.00	67	32.40	794.45	*	420.46	582.61	1.28	133.87	136.89 (27Ø1")	33.32	22.31	34.20 (12Ø3/4")
II-X		4.67	1.00	52	22.50	468.41	*	322.24	631.92	1.15	80.87	81.12 (16Ø1")	25.28	17.32	25.65 (9Ø3/4")
I-X	1440	12.00	2.00	42	115.20	1693.21	136.80	500.88	699.83	7.27	167.83	172.38 (34Ø1")	130.51	27.97	131.82 (26Ø1")
II-X		5.33	2.00	42	80.00	894.98	95.00	499.75	720.00	5.05	74.55	76.95 (27Ø3/4")	61.71	27.97	65.91 (13Ø1")
I-X	2160	18.00	2.00	52	115.20	2592.81	100.80	510.05	703.07	5.87	311.69	314.34 (62Ø1")	161.36	34.63	162.24 (32Ø1")
II-X		7.33	2.00	37	80.00	1268.16	107.50	350.12	720.00	5.73	90.31	91.20 (32Ø3/4")	109.86	24.64	111.54 (22Ø1")

Las Tablas 1 y 2 presentan el diseño completo de las zapatas aisladas rectangulares sometidas a flexión uniaxial.

La Tabla 1 muestra lo siguiente: El peralte efectivo se rige por el cortante por flexión en el eje *c* para los dos casos (M_{ux} = 360, 720, 1440 kN-m), y por el momento en el eje *a* para los dos casos (M_{ux} = 2160 kN-m). El peralte efectivo menor se presenta en el caso II-Y para M_{ux} = 360, 720, 2160 kN-m, y para M_{ux} = 1440 kN-m el peralte efectivo es el mismo en el caso I-Y y II-Y. El área de acero propuesta más pequeña aparece en el caso II-Y para los dos casos en ambas direcciones

excepto en $M_{ux} = 360$ kN-m que son iguales en el caso I-Y y II-Y en la dirección Y.

En la Tabla 2 se presenta lo siguiente: El peralte efectivo se rige por el cortante por flexión en el eje e para los dos casos ($M_{uy} = 360, 720, 1440$ kN-m), y por el momento en el eje b para los dos casos ($M_{uy} = 2160$ kN-m). El peralte efectivo menor se presenta en el caso II-X para $M_{uy} = 360, 720, 2160$ kN-m, y para $M_{uy} = 1440$ kN-m el peralte efectivo es el mismo en el caso I-X y II-X. El área de acero propuesta más pequeña aparece en el caso II-X para los dos casos en ambas direcciones excepto en $M_{uy} = 360$ kN-m que son iguales en el caso I-X y II-X en la dirección X.

Las Tablas 3 a 6 presentan el diseño completo de las zapatas aisladas rectangulares sometidas a flexión biaxial.

Las Tablas 3 a 6 presentan los dos casos para obtener el diseño completo de las zapatas aisladas rectangulares sometidas a flexión biaxial, un caso cuando toda el área de contacto trabaja a compresión (Caso I), y otro caso cuando el área de contacto trabaja parcialmente a compresión (la menor área de los casos II, III, IV y V).

El procedimiento utilizado para las Tablas 3 a 6 es el siguiente:

Para el caso I: Sustituyendo $P_u, M_{ux}, M_{uy}, h_x, h_y$ en la ecuación (1), y posteriormente se sustituye la ecuación (1), h_x, h_y, c_1, c_2 y d en las ecuaciones (5) a (8) y (25).

Para los casos II, III, IV y V: Sustituyendo $\sigma_{umax}, h_x, h_{x1}, h_y, h_{y1}$ en la ecuación (4), y posteriormente se sustituye la ecuación (4), $h_x, h_{x1}, h_y, h_{y1}, c_1, c_2$ y d en las ecuaciones (29) a (32) (caso II), en las ecuaciones (33) a (36) (caso IIIA), en las ecuaciones (37) a (40) (caso IIIB), en las ecuaciones (41) a (44) (caso IVA), en las ecuaciones (45) a (48) (caso IVB), en las ecuaciones (49) a (52) (caso VA), en las ecuaciones (53) a (56) (caso VB), en las ecuaciones (57) a (60) (caso VC), en las ecuaciones (61) a (64) (caso VD), y (26), (65) a (68) según sea el caso.

La Tabla 3 muestra los resultados para c_1 y $c_2 = 0.40$ m, $P_u = 720$ kN, $M_{ux} = 360, 720, 1440, 2160$ kN-m, $M_{uy} = 360$ kN-m y $\sigma_{umax} = 250$ kN/m². El área más pequeña aparece en el caso V para $M_{ux} = 360$ y 720 kN-m, y en el caso II para $M_{ux} = 1440$ y 2160 kN-m.

Tabla 3. Diseño completo de la zapata para $M_{uy} = 360$ kN-m.

(Fuente: Elaboración propia)

Caso	M_{ux} kN-m	h_x m	h_y m	d cm	M_{ua} kN-m	M_{ub} kN-m	V_{uc} kN	V_{ue} kN	V_{up} kN	A_{smy} cm ²	A_{sminy} cm ²	A_{spx} cm ²	A_{smx} cm ²	A_{sminx} cm ²	A_{spx} cm ²
I	360	6.00	6.00	27	632.43	632.43	391.39	391.39	711.02	65.04	53.95	65.55 (23Ø3/4")	65.04	53.95	65.55 (23Ø3/4")
V		2.72	2.72	22	229.25	229.25	305.04	305.04	698.58	29.25	19.93	31.35 (11Ø3/4")	29.25	19.93	31.35 (11Ø3/4")
I	720	6.00	12.00	27	1351.21	632.43	421.25	391.39	715.51	148.38	53.95	152.10 (30Ø1")	63.43	107.89	111.54 (22Ø1")
V		2.22	4.45	27	472.00	196.31	367.54	298.13	709.58	51.44	19.93	55.77 (11Ø1")	19.61	40.01	42.75 (15Ø3/4")
I	1440	6.00	24.00	32	2790.60	632.43	434.23	384.90	717.41	278.09	63.94	278.85 (55Ø1")	52.71	255.74	258.57 (51Ø1")
II		1.87	7.46	37	948.06	174.75	419.11	254.16	720.00	78.18	23.04	79.80 (16Ø1")	12.56	91.91	94.05 (33Ø3/4")
I	2160	6.00	36.00	42	4230.40	632.43	437.49	371.76	717.76	311.87	83.92	314.34 (62Ø1")	39.96	503.50	507.00 (100Ø1")
II		1.71	10.24	42	1428.46	165.34	447.01	210.14	720.00	109.68	23.02	111.54 (22Ø1")	10.44	143.22	145.35 (51Ø3/4")

La Tabla 3 muestra lo siguiente: El peralte efectivo se rige por el cortante por punzonamiento para los dos casos ($M_{ux} = 360, 720$ kN-m), y por el momento en el eje a para los dos casos ($M_{ux} = 1440, 2160$ kN-m). El peralte efectivo más pequeño ocurre en el caso V para $M_{ux} = 360$ kN-m, el peralte efectivo más pequeño ocurre en el caso I para $M_{ux} = 1440$ kN-m, y para $M_{ux} = 720, 2160$ kN-m el peralte efectivo es el mismo en ambos casos. El área de acero propuesta más grande aparece en el caso I para los dos casos en ambas direcciones.

La Tabla 4 muestra los resultados para c_1 y $c_2 = 0.40$ m, $P_u = 720$ kN, $M_{ux} = 360, 720, 1440, 2160$ kN-m, $M_{uy} = 720$ kN-m y $\sigma_{umax} = 250$ kN/m². El área más pequeña aparece en el caso V para $M_{ux} = 360$ kN-m, y en el caso II para $M_{ux} = 720, 1440$ y 2160 kN-m.

Tabla 4. Diseño completo de la zapata para $M_{uy} = 720$ kN-m.
(Fuente: Elaboración propia)

Caso	M_{ux} kN-m	h_x m	h_y m	d cm	M_{ua} kN-m	M_{ub} kN-m	V_{uc} kN	V_{ue} kN	V_{up} kN	A_{smy} cm ²	A_{smiy} cm ²	A_{spsy} cm ²	A_{smx} cm ²	A_{smix} cm ²	A_{spx} cm ²
I	360	12.00	6.00	27	632.43	1351.21	391.39	421.25	715.51	63.43	107.89	111.54 (22Ø1")	148.38	53.95	152.10 (30Ø1")
V		4.45	2.22	27	196.31	472.00	298.13	367.54	709.58	19.61	40.10	42.75 (15Ø3/4")	51.44	19.96	54.15 (19Ø3/4")
I	720	12.00	12.00	27	1351.21	1351.21	421.25	421.25	717.76	139.46	107.89	141.96 (28Ø1")	139.46	107.89	141.96 (28Ø1")
II		3.73	3.73	27	430.31	430.31	392.78	392.78	720.00	44.47	33.54	45.63 (9Ø1")	44.47	33.54	45.63 (9Ø1")
I	1440	12.00	24.00	27	2790.60	1351.21	435.76	421.25	718.88	307.84	107.89	309.27 (61Ø1")	135.74	215.78	218.01 (51Ø1")
II		3.22	6.45	27	913.51	408.86	458.25	423.74	720.00	104.20	28.95	106.47 (21Ø3/4")	41.21	57.99	59.85 (21Ø3/4")
I	2160	12.00	36.00	27	4230.40	1351.21	440.54	421.25	719.25	508.33	107.89	512.07 (101Ø1")	134.59	323.68	324.48 (64Ø1")
II		3.00	9.00	32	1404.83	403.75	480.92	433.67	720.00	140.24	31.97	141.96 (28Ø1")	33.85	95.90	96.90 (34Ø3/4")

La Tabla 5 muestra los resultados para c_1 y $c_2 = 0.40$ m, $P_u = 720$ kN, $M_{ux} = 360, 720, 1440, 2160$ kN-m, $M_{uy} = 1440$ kN-m y $\sigma_{umax} = 250$ kN/m². El área más pequeña aparece en el caso II para $M_{ux} = 360, 720, 1440$ y 2160 kN-m.

Tabla 5. Diseño completo de la zapata para $M_{uy} = 1440$ kN-m.
(Fuente: Elaboración propia)

Caso	M_{ux} kN-m	h_x m	h_y m	d cm	M_{ua} kN-m	M_{ub} kN-m	V_{uc} kN	V_{ue} kN	V_{up} kN	A_{smy} cm ²	A_{smiy} cm ²	A_{spsy} cm ²	A_{smx} cm ²	A_{smix} cm ²	A_{spx} cm ²
I	360	24.00	6.00	32	632.43	2790.60	384.90	434.23	717.41	52.71	255.74	258.57 (51Ø1")	278.09	63.94	278.85 (55Ø1")
II		7.46	1.87	37	174.75	948.06	254.16	419.11	720.00	12.56	91.91	94.05 (33Ø3/4")	78.18	23.04	79.80 (16Ø1")
I	720	24.00	12.00	27	1351.21	2790.60	421.25	435.76	718.88	135.74	215.78	218.01 (51Ø1")	307.84	107.89	309.27 (61Ø1")
II		6.45	3.22	27	408.86	913.51	423.74	458.25	720.00	41.21	57.99	59.85 (21Ø3/4")	104.20	28.95	106.47 (21Ø1")
I	1440	24.00	24.00	27	2790.60	2790.60	435.76	435.76	719.44	288.54	215.78	288.99 (57Ø1")	288.54	215.78	288.99 (57Ø1")
II		5.73	5.73	27	899.07	899.07	484.27	484.27	720.00	94.95	51.52	96.33 (19Ø1")	94.95	51.52	96.33 (19Ø1")
I	2160	24.00	36.00	27	4230.40	2790.60	440.54	435.76	719.63	451.51	215.78	456.30 (90Ø1")	283.13	323.68	324.48 (64Ø1")
II		5.41	8.12	32	1399.94	898.75	498.17	495.32	720.00	157.03	48.64	157.17 (31Ø1")	92.67	73.01	94.05 (33Ø3/4")

La Tabla 4 muestra lo siguiente: El peralte efectivo se rige por el cortante por punzonamiento para los dos casos ($M_{ux} = 360, 720, 1440$ kN-m), y por el momento en el eje a para los dos casos ($M_{ux} = 2160$ kN-m). El peralte efectivo menor ocurre en el caso I para $M_{ux} = 2160$ kN-m, y para $M_{ux} = 360, 720, 1440$ kN-m el peralte efectivo es el mismo en ambos casos. El área de acero propuesta más grande aparece en el caso I para los dos casos en ambas direcciones.

La Tabla 5 muestra lo siguiente: El peralte efectivo se rige por el cortante por punzonamiento para los dos casos ($M_{ux} = 720, 1440, 2160$ kN-m), y por el momento en el eje a para los dos casos ($M_{ux} = 360$ kN-m). El peralte efectivo menor ocurre en el caso I para $M_{ux} = 360$ kN-m, y para $M_{ux} = 720, 1440, 2160$ kN-m el peralte efectivo es el mismo en ambos casos. El área de acero propuesta

Nuevo modelo para el diseño completo de zapatas aisladas rectangulares tomando en cuenta que la superficie de contacto funciona parcialmente en compresión

más grande aparece en el caso I para los dos casos en ambas direcciones.

La Tabla 6 muestra los resultados para c_1 y $c_2 = 0.40$ m, $P_u = 720$ kN, $M_{ux} = 360, 720, 1440, 2160$ kN-m, $M_{uy} = 2160$ kN-m y $\sigma_{umax} = 250$ kN/m². El área más pequeña aparece en el caso II para $M_{ux} = 360, 720, 1440$ y 2160 kN-m.

Tabla 6. Diseño completo de la zapata para $M_{uy} = 2160$ kN-m.
(Fuente: Elaboración propia)

Caso	M_{ux} kN-m	h_x m	h_y m	d cm	M_{ua} kN-m	M_{ub} kN-m	V_{uc} kN	V_{ue} kN	V_{up} kN	A_{smy} cm ²	A_{sminy} cm ²	A_{spx} cm ²	A_{smx} cm ²	A_{sminx} cm ²	A_{spx} cm ²
I	360	36.00	6.00	42	632.43	4230.40	371.76	437.49	717.76	39.96	503.50	507.00 (100Ø1")	311.87	83.92	314.34 (62Ø1")
II		10.24	1.71	42	165.34	1428.46	210.14	447.01	720.00	10.44	143.22	145.35 (51Ø3/4")	109.68	23.92	111.54 (22Ø1")
I	720	36.00	12.00	27	1351.21	4230.40	421.25	440.54	719.63	134.59	323.68	324.48 (64Ø1")	307.84	107.89	309.27 (61Ø1")
II		9.00	3.00	32	403.75	1404.83	433.67	480.92	720.00	33.85	95.90	96.90 (34Ø3/4")	140.24	31.97	141.96 (28Ø1")
I	1440	36.00	24.00	27	2790.60	4230.40	435.76	440.54	719.44	283.13	323.68	324.48 (64Ø1")	451.51	215.78	456.30 (90Ø1")
II		8.12	5.41	27	898.75	1399.94	495.32	498.17	720.00	92.67	73.01	94.05 (33Ø3/4")	157.03	48.64	157.17 (31Ø1")
I	2160	36.00	36.00	27	4230.40	4230.40	440.54	440.54	719.75	437.69	323.68	441.09 (87Ø1")	437.69	323.68	441.09 (87Ø1")
II		7.73	7.73	32	1396.69	1396.69	498.81	498.81	720.00	149.44	69.50	152.10 (30Ø1")	149.44	69.50	152.10 (30Ø1")

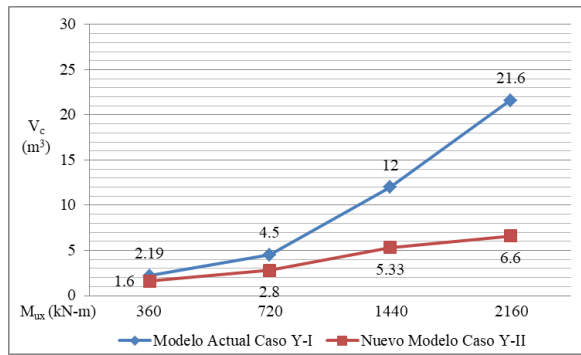
La Tabla 6 muestra lo siguiente: El peralte efectivo se rige por el cortante por punzonamiento para los dos casos ($M_{ux} = 1440, 2160$ kN-m), y por el momento en el eje a para los dos casos ($M_{ux} = 360, 720$ kN-m). El peralte efectivo menor ocurre en el caso I para $M_{ux} = 720$ kN-m, y para $M_{ux} = 360, 1440, 2160$ kN-m el peralte efectivo es el mismo en ambos casos. El área de acero propuesta más grande aparece en el caso I para los dos casos en ambas direcciones.

La Figura 8 muestra la comparación para la flexión uniaxial (carga axial sobre el eje Y) del modelo actual (Caso I-Y) y el nuevo modelo (Caso II-Y) en términos de volumen de concreto y acero de los ejemplos considerados.

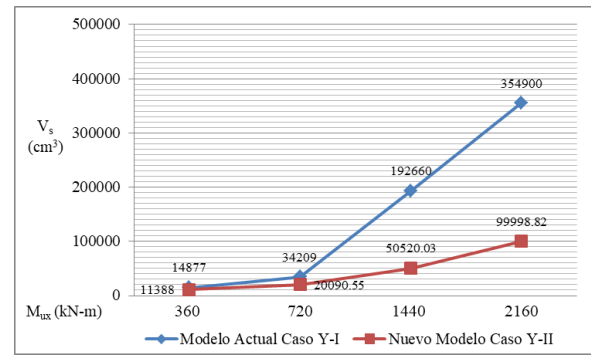
La Figura 8 muestra lo siguiente: El nuevo modelo presenta menores volúmenes de concreto y acero en todos los casos que el modelo actual. La diferencia más pequeña en los volúmenes de concreto y acero ocurre en $M_{ux} = 360$ kN-m de 1.37 veces para concreto y 1.31 veces para acero. La mayor diferencia de volúmenes de concreto y acero se da en $M_{ux} = 2160$ kN-m de 3.27 veces para concreto y 3.55 veces para acero.

La Figura 9 muestra la comparación para la flexión uniaxial (carga axial sobre el eje X) del modelo actual (Caso I-X) y el nuevo modelo (Caso II-X) en términos de volumen de concreto y acero de los ejemplos considerados.

La Figura 9 muestra lo siguiente: El nuevo modelo presenta menores volúmenes de concreto y acero en todos los casos que el modelo actual. La diferencia más pequeña en los volúmenes de concreto y acero ocurre en $M_{uy} = 360$ kN-m de 1.37 veces para concreto y 1.31 veces para acero. La mayor diferencia de volúmenes de concreto y acero se da en $M_{uy} = 2160$ kN-m de 3.27 veces para concreto y 3.55 veces para acero.



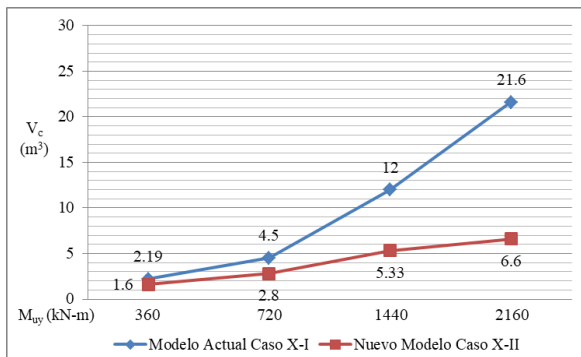
(a) Concreto



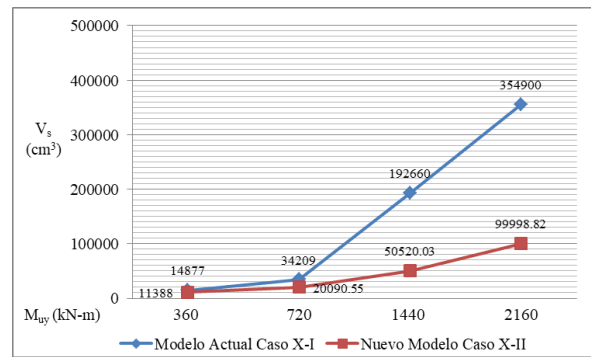
(b) Acero

Figura 8. Comparación para flexión uniaxial ($M_{uy} = 0$)

Fuente: Elaboración propia



(a) Concreto



(b) Acero

Figura 9. Comparación para flexión uniaxial ($M_{ux} = 0$)

Fuente: Elaboración propia

La Figura 10 muestra la comparación para la flexión biaxial del modelo actual (Caso I) y el nuevo modelo (Caso II o V) en términos de volumen de concreto y acero de los ejemplos considerados.

La Figura 10 muestra lo siguiente:

El nuevo modelo presenta menores volúmenes de concreto y acero en todos los casos que el modelo actual.

Las diferencias más pequeñas se presentan en $M_{ux} = 360$ kN-m para todos los casos en los volúmenes de concreto y acero de 5.68 veces para concreto y 4.61 veces para acero ($M_{uy} = 360$ kN-m), 7.28 veces para concreto y 7.43 veces para acero ($M_{uy} = 720$ kN-m), 9.17 veces para concreto y 10.69 veces para acero ($M_{uy} = 1440$ kN-m), 12.33 veces para concreto y 10.32 veces para acero ($M_{uy} = 2160$ kN-m).

Las diferencias más grandes se presentan en $M_{ux} = 2160$ kN-m para todos los casos en los volúmenes de concreto y acero de 12.33 veces para concreto y 10.32 veces para acero ($M_{uy} = 360$ kN-m), 14.00 veces para concreto y 14.24 veces para acero ($M_{uy} = 720$ kN-m), 19.66 veces para concreto y 13.57 veces para acero ($M_{uy} = 1440$ kN-m), 21.69 veces para concreto y 13.51 veces para acero ($M_{uy} = 2160$ kN-m).

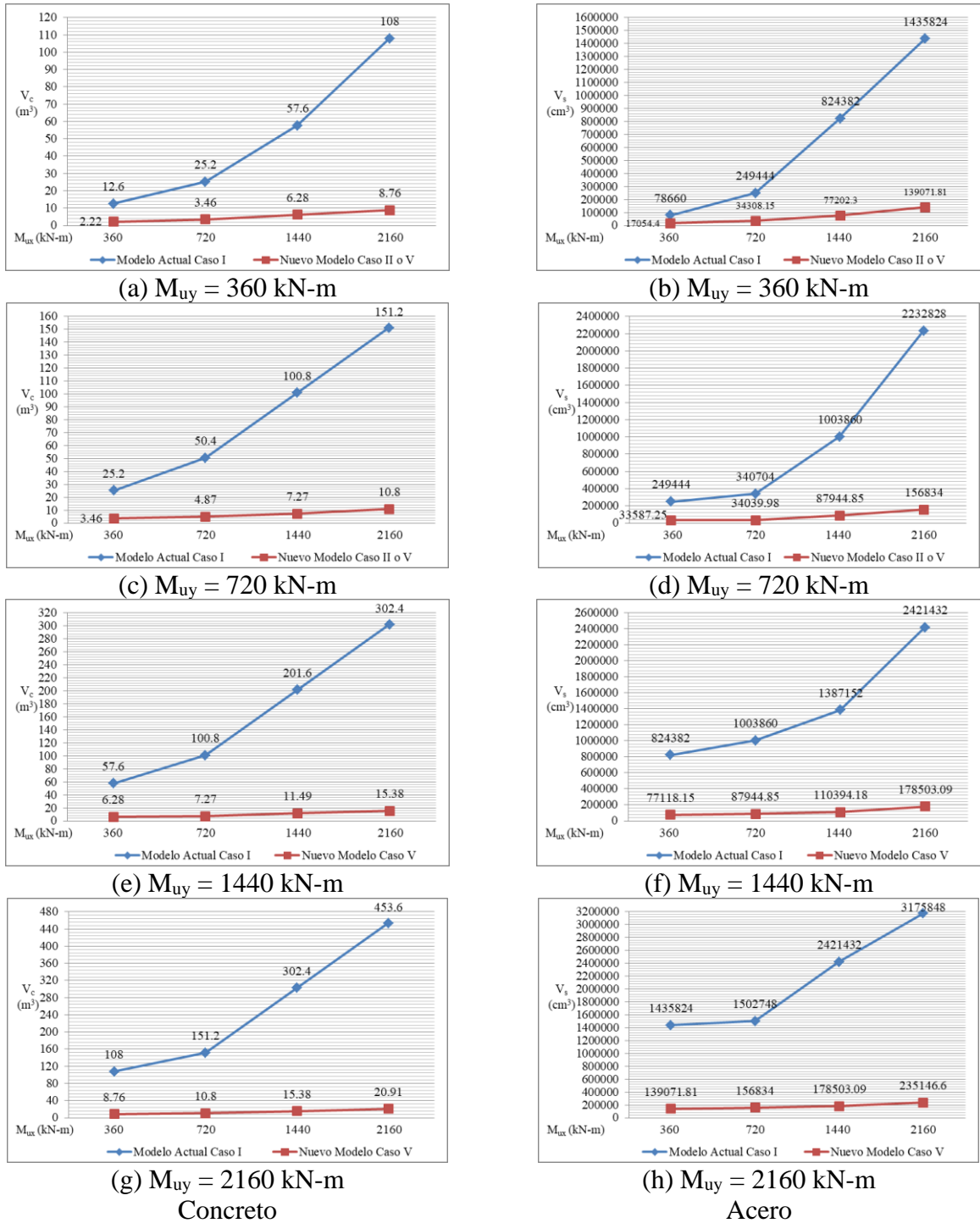


Figura 10. Comparación para flexión biaxial
 Fuente: Elaboración propia

4. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta un nuevo modelo matemático de diseño completo para obtener los espesores y áreas del acero transversal y longitudinal para zapatas aisladas rectangulares sometidas a flexión uniaxial y biaxial apoyadas sobre suelos elásticos, que considera la superficie total trabajando parcialmente a compresión y se asume que la distribución de la presión sobre el suelo es lineal. Las principales contribuciones de este trabajo para estos ejemplos son:

Nuevo modelo para el diseño completo de zapatas aisladas rectangulares tomando en cuenta que la superficie de contacto funciona parcialmente en compresión

- 1.- Este trabajo muestra una reducción significativa en los volúmenes de concreto y acero respecto al modelo actual, si la superficie de contacto con el suelo trabaja parcialmente a compresión.
- 2.- Este trabajo muestra una reducción significativa en el volumen de excavación respecto al modelo actual, debido a que el nuevo modelo ocupa menos volumen.
- 3.- Los espesores para ambos modelos se rigen por momentos y cortantes por flexión para flexión uniaxial, y por momentos y cortante por punzonamiento para flexión biaxial.
- 4.- El nuevo modelo puede ser utilizado para cualquier reglamento de edificación, simplemente tomando en cuenta los momentos, los cortantes por flexión y los cortantes por punzonamiento que resisten para definir el peralte efectivo, y las ecuaciones para determinar las áreas de acero de refuerzo propuestas por cada reglamento de edificación.
- 5.- El nuevo modelo se puede usar cuando la carga P_u se ubica fuera del núcleo central ($e_x/h_x + e_y/h_y > 1/6$), y el modelo actual se usa cuando la carga P_u se ubica dentro del núcleo central ($e_x/h_x + e_y/h_y \leq 1/6$), donde $e_x = M_y/P$ y $e_y = M_x/P$.

Este trabajo muestra una solución eficaz y robusta aplicada para obtener el diseño completo de zapatas aisladas rectangulares sometidas a flexión uniaxial y biaxial apoyadas sobre suelos elásticos que trabajan parcialmente a compresión, y la variación del diagrama de presión es lineal. Las sugerencias para la próxima investigación:

- 1.- Diseño completo para zapatas combinadas (rectangulares, trapezoidales, correas, de esquina y en forma de T) sometidas a flexión uniaxial y biaxial apoyadas sobre suelos elásticos trabajando parcialmente a compresión.
- 2.- Zapatas apoyadas sobre suelos totalmente cohesivos (suelos arcillosos) y/o suelos totalmente granulares (suelos arenosos), el diagrama de presión es diferente, debido a que el diagrama de presiones no es lineal como se presenta en este trabajo.

5. REFERENCIAS

- ACI 318S-19 (2019), “*Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, Committee 318”, New York, USA.
- Aguilera-Mancilla, G., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S. and Medina-Elizondo, M. (2019), *Modeling for the strap combined footings Part I: Optimal dimensioning*. Steel and Composite Structures. 30(2):97-108. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.2.097>
- Al-Gahtani, H.J. and Adekunle, S.K. (2019), *A boundary-type approach for the computation of vertical stresses in soil due to arbitrarily shaped foundations*. World Journal of Engineering. 16(3): 419-426. <https://doi.org/10.1108/WJE-02-2018-0051>
- Algin, H.M. (2000), *Stresses from linearly distributed pressures over rectangular areas*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 24(8):681-692. [https://doi.org/10.1002/1096-9853\(200007\)24:8<681::AID-NAG89>3.0.CO;2-X](https://doi.org/10.1002/1096-9853(200007)24:8<681::AID-NAG89>3.0.CO;2-X)
- Algin, H.M. (2007), *Practical formula for dimensioning a rectangular footing*. Engineering Structures. 29(6):1128-1134. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.08.009>
- Aydogdu, I. (2016), *New Iterative method to Calculate Base Stress of Footings under Biaxial Bending*. Journal of Engineering and Applied Sciences. 8(4):40-48. <https://doi.org/10.24107/ijeas.281460>
- Bezmalinovic Colleoni, A.S. (2016), *Fórmulas analíticas para la presión de contacto lineal en fundaciones rectangulares altamente excéntricas*. IX Chilean Congress on Geotechnical Engineering, Chilean Geotechnical Society, Universidad Austral de Chile.
- Dagdeviren, U. (2016), *Shear stresses below the rectangular foundations subjected to biaxial bending*, Geomechanics Engineering. 10(2):189-205. <https://doi.org/10.12989/gae.2016.10.2.189>

- Filho, W.L., Carvalho, R.CH., Christoforo, A.L. and Lahr, F.A.R. (2017), *Dimensioning of Isolated Footing Submitted to the under Biaxial Bending Considering the Low Concrete Consumption*. International Journal of Materials Engineering. 7(1):1-11. <http://article.sapub.org/10.5923.j.ijme.20170701.01.html>
- Galvis, F.A. and Smith-Pardo, J.P. (2020), *Axial load biaxial moment interaction (PMM) diagrams for shallow foundations: Design aids, experimental verification, and examples*. Engineering Structures. 213:110582. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110582>
- Girgin, K. (2017), *Simplified formulations for the determination of rotational spring constants in rigid spread footings resting on tensionless soil*. Journal Civil Engineering and Management. 23(4):464-474. <https://doi.org/10.3846/13923730.2016.1210218>
- Gör, M. (2022), *Analyzing the bearing capacity of shallow foundations on two-layered soil using two novel cosmology-based optimization techniques*. Smart Structures and Systems. 29(3):513-522. <https://doi.org/10.12989/sss.2022.29.3.513>
- Irles-Más, R. and Irles-Más, F. (1992), *Alternativa analítica a la determinación de tensiones bajo zapatas rectangulares con flexión biaxial y despegue parcial*. Informes de la Construcción. 44(419):77-89. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2768804>
- Jahanandish, M., Veiskarami, M. and Ghahramani, A. (2012), *Effect of Foundation Size and Roughness on the Bearing Capacity Factor, N_γ , by Stress Level-Based ZEL Method*. Arabian Journal for Science and Engineering. 37(7):1817-1831. <https://doi.org/10.1007/s13369-012-0293-3>
- Kaur, A. and Kumar, A. (2016), *Behavior of eccentrically inclined loaded footing resting on fiber reinforced soil*. Geomechanics Engineering. 10(2):155-174. <https://doi.org/10.12989/gae.2016.10.2.155>
- Khajehzadeh, M., Taha M.R. and Eslami, M. (2014), *Multi-objective Optimization of foundation using global-local gravitational search algorithm*. Structural Engineering and Mechanics. 50(3): 257-273. <https://doi.org/10.12989/sem.2014.50.3.257>
- Kim-Sánchez, D.S., Luévanos-Rojas, A., Barquero-Cabrero, J.D., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. and Luévanos-Soto, I. (2022). *A New Model for the Complete Design of Circular Isolated Footings Considering that the Contact Surface Works Partially under Compression*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 18(6):1769-1784. <http://www.ijicic.org/ijicic-180607.pdf>
- Lee, J., Jeong, S. and Lee, J.K. (2015), *3D analytical method for mat foundations considering coupled soil springs*. Geomechanics Engineering. 8(6):845-850. <https://doi.org/10.12989/gae.2015.8.6.845>
- Lezgy-Nazargah, M., Mamazizi, A. and Khosravi, H. (2022), *Analysis of shallow footings rested on tensionless foundations using a mixed finite element model*. Structural Engineering and Mechanics. 81(3):379-394. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.3.379>
- López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A. and Medina-Elizondo, M. (2017a), *A mathematical model for dimensioning of square isolated footings using optimization techniques: general case*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 13(1):67-74. <http://www.ijicic.org/ijicic-130105.pdf>
- López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A. and Medina-Elizondo, M. (2017b), *Optimal dimensioning for the corner combined footings*. Advances in Computational Design. 2(2):169-183. <https://doi.org/10.12989/acd.2017.2.2.169>
- López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A. and Medina-Elizondo, M. (2017c), *A new mathematical model for design of square isolated footings for general case*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 13(4):1149-1168. <http://www.ijicic.org/ijicic-130406.pdf>

- López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A., Medina-Elizondo, M., Sandoval-Rivas, R. and Velázquez-Santillán, F. (2019), *Optimal design for the reinforced concrete circular isolated footings*. *Advances in Computational Design*. 4(3):273-294. <https://doi.org/10.12989/acd.2019.4.3.273>
- Luévanos-Rojas, A. (2012a), *A Mathematical Model for Dimensioning of Footings Square*. *International Review of Civil Engineering*. 3(4):346-350.
- Luévanos-Rojas, A. (2012b), *A Mathematical Model for the Dimensioning of Circular Footings*. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 71(2): 357-367.
- Luévanos-Rojas, A. (2013), *A Mathematical Model for Dimensioning of Footings Rectangular*. *ICIC Express Letters Part B: Applications*. 4(2):269-274.
- Luévanos-Rojas, A., Faudoa-Herrera, J.G., Andrade-Vallejo, R.A. and Cano-Alvarez, M.A. (2013), *Design of Isolated Footings of Rectangular Form Using a New Model*. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 9(10):4001-4022. <http://www.ijicic.org/ijicic-12-10031.pdf>
- Luévanos-Rojas, A. (2014a), *A Comparative Study for Dimensioning of Footings with Respect to the Contact Surface on Soil*. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 10(4):1313-1326. <http://www.ijicic.org/ijicic-13-08003.pdf>
- Luévanos-Rojas, A. (2014b), *Design of isolated footings of circular form using a new model*. *Structural Engineering and Mechanics*. 52(4):767-786. <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2014.52.4.767>
- Luévanos-Rojas, A. (2014c), *Design of boundary combined footings of rectangular shape using a new model*. *DYNA Colombia*. 81(188):199-208. <https://doi.org/10.15446/dyna.v81n188.41800>
- Luévanos-Rojas, A. (2015a), *A New Approach for Dimensioning of Rectangular Footings Using Optimization Techniques*. *ICIC Express Letters Part B: Applications*. 6(11):3141-3146.
- Luévanos-Rojas, A. (2015b), *A New Mathematical Model for Dimensioning of the Boundary Trapezoidal Combined Footings*. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 11(4):1269-1279. <http://www.ijicic.org/ijicic-110411.pdf>
- Luévanos-Rojas, A. (2015c), *A new model for the design of rectangular combined boundary footings with two restricted opposite sides*. *Revista ALCONPAT*. 6(2):172-187. <http://dx.doi.org/10.21041/ra.v6i2.137>
- Luévanos-Rojas, A. (2015d), *Design of boundary combined footings of trapezoidal form using a new model*. *Structural Engineering and Mechanics*. 56(5):745-765. <https://doi.org/10.12989/sem.2015.56.5.745>
- Luévanos-Rojas, A. (2016a), *A Mathematical Model for the Dimensioning of Combined Footings of Rectangular Shape*. *Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia*. 39(1):3-9. <https://produccioncientificaluz.org/index.php/tecnica/article/view/21090/20946>
- Luévanos-Rojas, A. (2016b), *Un nuevo modelo para diseño de zapatas combinadas rectangulares de lindero con dos lados opuestos restringidos*. *Revista ACONPAT*. 6(2):173-189. <http://dx.doi.org/10.21041/ra.v6i2.137>
- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S. and Medina-Elizondo, M. (2017), *Optimal design for rectangular isolated footings using the real soil pressure*. *Ingeniería e Investigación*. 37(2):25-33. <http://dx.doi.org/10.15446/ing.investig.v37n2.61447>
- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S. and Medina-Elizondo, M. (2018a), *A new model for T-shaped combined footings Part I: Optimal dimensioning*. *Geomechanics Engineering*. 14(1):51-60. <https://doi.org/10.12989/gae.2018.14.1.051>
- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S. and Medina-Elizondo, M. (2018b), *A new model for T-shaped combined footings Part II: Mathematical model for design*. *Geomechanics Engineering*. 14(1):61-69. <https://doi.org/10.12989/gae.2018.14.1.061>

- Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., Farías Montemayor, O. M. (2020), *Un modelo analítico para el diseño de zapatas combinadas de esquina*. Revista ALCONPAT. 10(3):317-335. <https://doi.org/10.21041/ra.v10i3.432>
- Özmen, G. (2011), *Determination of Base Stresses in Rectangular Footings under Biaxial Bending*. Teknik Dergi Digest. 22(4):1519-1535. http://www.imo.org.tr/resimler/dosya_ekler/7b559795bd3f63b_ek.pdf?dergi=472
- Rawat, S., Mittal, R.K. and Muthukumar, G. (2020), *Isolated Rectangular Footings under Biaxial Bending: A Critical Appraisal and Simplified Analysis Methodology*. Practice Periodical on Structural Design and Construction. 25(3):04020011. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SC.1943-5576.0000471](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000471)
- Rodriguez-Gutierrez, J.A. and Aristizabal-Ochoa, J.D. (2013a), *Rigid Spread Footings Resting on Soil Subjected to Axial Load and Biaxial Bending. I: Simplified Analytical Method*. International Journal of Geomechanics. 13(2):109-119. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000218](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000218)
- Rodriguez-Gutierrez, J.A. and Aristizabal-Ochoa, J.D. (2013b), *Rigid Spread Footings Resting on Soil Subjected to Axial Load and Biaxial Bending. II: Design Aids*. International Journal of Geomechanics. 13(2):120-131. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000210](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000210)
- Soto-Garcia, S., Luévanos-Rojas, A., Barquero-Cabrero, J.D., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Farias-Montemayor, O.M. and Martinez-Aguilar, C. (2022). *A New Model for the Contact Surface With Soil of Circular Isolated Footings Considering that the Contact Surface Works Partially Under Compression*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 18(4):1103-1116. <http://www.ijicic.org/ijicic-180406.pdf>
- Vela-Moreno, V.B., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Sandoval-Rivas, R. and Martinez-Aguilar, C. (2022), *Optimal area for rectangular isolated footings considering that contact surface works partially to compression*. Structural Engineering and Mechanics. 84(4):561-573. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.84.4.561>
- Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. and Sandoval-Rivas, R. (2018), *Numerical experimentation for the optimal design for reinforced concrete rectangular combined footings*. Advances in Computational Design. 3(1):49-69. <https://doi.org/10.12989/acd.2018.3.1.049>
- Yáñez-Palafox, J.A., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S. and Medina-Elizondo, M. (2019), *Modeling for the strap combined footings Part II: Mathematical model for design*. Steel and Composite Structures. 30(2):109-121. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.2.109>