

Dimensionamento completo de sapatas combinadas retangulares, considerando que a área de contato com o solo está parcialmente comprimida.

A. Luévanos Rojas^{1*} , S. López Chavarría¹ ,
M. Medina Elizondo¹ , C. Martínez Aguilar¹ 
* Autor de Contato: arnulfol_2007@hotmail.com
DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v16i3.1021>

Recebido: 14/02/2026 | Correções recebidas: 14/04/2026 | Aceito: 10/07/2026 | Publicado: 01/09/2026

RESUMO

Este trabalho apresenta o dimensionamento completo de ZCRs (sapatas combinadas retangulares), considerando que a superfície de contato com o solo está parcialmente comprimida. A formulação é desenvolvida por meio de integração para determinar os momentos, os esforços cortantes por flexão e os esforços cortantes por punção para todos os casos possíveis de sapatas submetidas à flexão biaxial e uniaxial. São apresentados estudos numéricos para determinar o dimensionamento desse tipo de sapata. O modelo proposto apresenta uma economia significativa nos volumes de aço e concreto em comparação com o modelo atual, quando a força resultante está localizada fora do núcleo central. Portanto, recomenda-se a utilização do modelo proposto, uma vez que proporciona melhor controle e otimização dos recursos empregados.

Palavras-chave: dimensionamento completo; sapatas combinadas retangulares; momentos; esforços cortantes por flexão; esforços cortantes por punção.

Citar como: Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Martínez Aguilar, C. (2026), “Dimensionamento completo de sapatas combinadas retangulares, considerando que a área de contato com o solo está parcialmente comprimida.”, Revista ALCONPAT, 16 (3), pp. 442 – 474, DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v16i3.1021>

¹ Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias, Universidad Autónoma de Coahuila, Torreón, Coahuila, México.

Contribuição de cada autor

Neste trabalho, o autor Arnulfo Luévanos Rojas contribuiu com a ideia original do artigo (100%), o desenvolvimento matemático do novo modelo (100%) e a coordenação geral do trabalho (100%). A autora Sandra López Chavarría contribuiu com a discussão dos resultados (100%). O autor Manuel Medina Elizondo contribuiu com a redação do trabalho (100%). A autora Carmela Martínez Aguilar contribuiu com a elaboração das figuras (100%) e a aplicação do modelo proposto (100%).

Licença Creative Commons

Copyright (2026) é propriedade dos autores. Este trabalho é um artigo de acesso aberto publicado sob os termos e condições de uma Licença Internacional Creative Commons Atribuição 4.0 ([CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)).

Discussões e correções pós-publicação

Qualquer discussão, incluindo a réplica dos autores, será publicada no segundo número do ano de 2027, desde que as informações sejam recebidas antes do encerramento do primeiro número de 2027.

Complete design for rectangular combined footings assuming that the contact area with the soil is partially compressed.

ABSTRACT

This paper presents the complete design for RCFs (rectangular combined footings), assuming that the contact area with the soil is partially compressed. The formulation is carried out by integration to determine the moments, flexural shearing and punching shearing for all possible cases for footings under biaxial and uniaxial flexion. Numerical studies are presented to determine the design of this type of foundation. The proposed model offers significant savings in concrete and steel volumes compared to the current model, if the resultant force is located outside the central nucleus. Therefore, the proposed model should be used, because it offers better quality in the control of the resources used.

Keywords: complete design; rectangular combined footings; moments; flexural shearing; punching shearing.

Diseño completo para zapatas combinadas rectangulares asumiendo que el área de contacto con el suelo está parcialmente comprimida.

RESUMEN

Este trabajo presenta el diseño completo para ZCRs (zapatas combinadas rectangulares), asumiendo que la superficie de contacto con el suelo está parcialmente comprimida. La formulación se lleva a cabo por integración para determinar los momentos, los cortantes por flexión y los cortantes por punzonamiento para todos los casos posibles para zapatas bajo flexión biaxial y uniaxial. Los estudios numéricos se presentan para determinar el diseño de este tipo de zapatas. El modelo propuesto presenta un ahorro significativo en los volúmenes de acero y concreto que el modelo actual, si la fuerza resultante se localiza fuera del núcleo central. Por lo tanto, el modelo propuesto se debe de utilizar, porque presenta mejor calidad en el control de los recursos utilizados.

Palabras clave: diseño completo; zapatas combinadas rectangulares; momentos; cortantes por flexión; cortantes por punzonamiento.

Informações legais

Revista ALCONPAT é uma publicação trimestral da Associação Latino-Americana de Controle de Qualidade, Patologia e Recuperação de Construção, Internacional, A.C., Km. 6, antiga estrada para Progreso, Merida, Yucatán, C.P. 97310, Tel. +52 1 983 419 8241, alconpat.int@gmail.com, Website: www.alconpat.org

Reserva de direitos de uso exclusivo No.04-2013-011717330300-203, eISSN 2007-6835, ambos concedidos pelo Instituto Nacional de Direitos Autorais. Editor responsável: Dr. Pedro Castro Borges. Responsável pela última atualização deste número, Unidade de Informática ALCONPAT, Eng. Elizabeth Sabido Maldonado.

As opiniões expressas pelos autores não refletem necessariamente a posição do editor.

A reprodução total ou parcial do conteúdo e das imagens da publicação é realizada de acordo com o código COPE e a licença CC BY 4.0 da Revista ALCONPAT.

Dimensionamiento completo de sapatas combinadas retangulares, considerando que a área de contato com o solo está parcialmente comprimida.

Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Martínez Aguilar, C.

1. INTRODUÇÃO

As dimensões das sapatas também dependem do tamanho e do tipo de estrutura a ser construída. A execução das fundações é fundamental para proporcionar o suporte adequado aos elementos de fundação e, em última instância, à própria estrutura.

As fundações superficiais devem atender a determinados requisitos de projeto:

Segurança quanto à capacidade de carga, ou seja, prevenção da ruptura por cisalhamento do solo subjacente;

Controle de recalques excessivos, que podem causar danos à estrutura sobrejacente ou comprometer sua funcionalidade.

A capacidade de carga do solo tem sido estudada para fundações superficiais submetidas à flexão biaxial, considerando uma distribuição linear das pressões no solo e uma superfície de contato parcialmente comprimida (Peck et al., 1974; Teng, 1979; Highte e Anders, 1985; Vitone e Valsangkar, 1986; Irles-Más e Irles-Más, 1992; Algin, 2000, 2001, 2007; Young e Budynas, 2002; Özmen, 2011; Rodriguez-Gutierrez e Aristizabal-Ochoa, 2004, 2013a, b; Lee et al., 2015; Kaur e Kumar, 2016; Bezmalinovic Colleoni, 2016; Dagdeviren, 2016; Aydogdu, 2016; Girgin, 2017; Al-Gahtani e Adekunle, 2019; Galvis e Smith-Pardo, 2020; Rawat et al., 2020; Lezgy-Nazargah et al., 2022; Gör, 2022).

As contribuições mais importantes para a determinação da área mínima e das dimensões das sapatas, considerando que a superfície de contato com o solo está parcialmente comprimida, incluem estudos sobre sapatas isoladas retangulares (Vela-Moreno et al., 2022) e circulares (Soto-García et al., 2022; Luévanos-Soto et al., 2024a), bem como sobre sapatas combinadas retangulares (ZCRs) (Montes-Páramo et al., 2023), sapatas combinadas em forma de T (Luévanos-Rojas et al., 2025) e sapatas combinadas de canto (Luévanos-Rojas, 2025a, b).

As pesquisas mais recentes sobre o dimensionamento completo de sapatas, considerando que a área de contato com o solo está parcialmente comprimida, incluem estudos sobre sapatas isoladas retangulares (Luévanos-Rojas, 2023) e sapatas isoladas circulares (Kim-Sánchez et al., 2022; Luévanos-Soto et al., 2024b).

Os estudos sobre o dimensionamento de sapatas combinadas retangulares (ZCRs) submetidas à flexão uniaxial e biaxial, considerando uma distribuição linear das pressões no solo, têm sido desenvolvidos por diversos pesquisadores (Konapure e Vivek, 2013; Vivek et al., 2014; Luévanos-Rojas, 2014; Luévanos-Rojas, 2016a, b; Luévanos-Rojas et al., 2017, 2020; Ravi Kumar Reddy et al., 2018; Velázquez-Santillán et al., 2018). Todos esses trabalhos consideram que a área de contato com o solo está totalmente comprimida.

De acordo com a revisão da literatura, as contribuições mais próximas ao tema abordado neste trabalho são aquelas relacionadas às sapatas isoladas retangulares, desenvolvidas por Luévanos-Rojas (2023), e às sapatas isoladas circulares (Kim-Sánchez et al., 2022; Luévanos-Soto et al., 2024b).

Portanto, não foram identificados estudos diretamente relacionados ao dimensionamento completo de sapatas combinadas retangulares (ZCRs), submetidas à flexão uniaxial e biaxial, considerando a área de contato com o solo parcialmente comprimida.

Este documento apresenta o dimensionamento completo de sapatas combinadas retangulares (ZCRs) para determinar a espessura e as áreas de armadura transversal e longitudinal, considerando que a área de contato com o solo está parcialmente comprimida e que as dimensões dos lados e a área mínima são conhecidas, conforme Montes-Páramo et al. (2023).

São apresentados exemplos numéricos para flexão biaxial, considerando os quatro tipos de restrições na direção do eixo Y (sem restrições, limitado na coluna 1, limitado na coluna 2 e limitado nas duas colunas), para $L = 6,00$ e $7,00$ m.

Para a flexão uniaxial, são apresentados exemplos numéricos para dois casos: 1) quando as cargas estão localizadas sobre o eixo Y (Caso Y); e 2) quando as cargas estão localizadas sobre o eixo X

(Caso X).

Também é realizada uma comparação entre o modelo atual e o modelo proposto neste artigo, com o objetivo de identificar as diferenças entre ambos.

Este modelo será de grande utilidade para os profissionais da construção de edificações, uma vez que proporciona melhor controle de qualidade dos recursos utilizados (mão de obra, materiais, equipamentos de pequeno porte etc.), por se ajustar às condições reais do solo. Consequentemente, possibilita maior economia na execução desse tipo de elemento estrutural.

2. 2 FORMULAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

A Figura 1 apresenta uma sapata combinada retangular (ZCR) rígida, submetida, em cada coluna, a uma carga axial, um momento em torno do eixo X e um momento em torno do eixo Y.

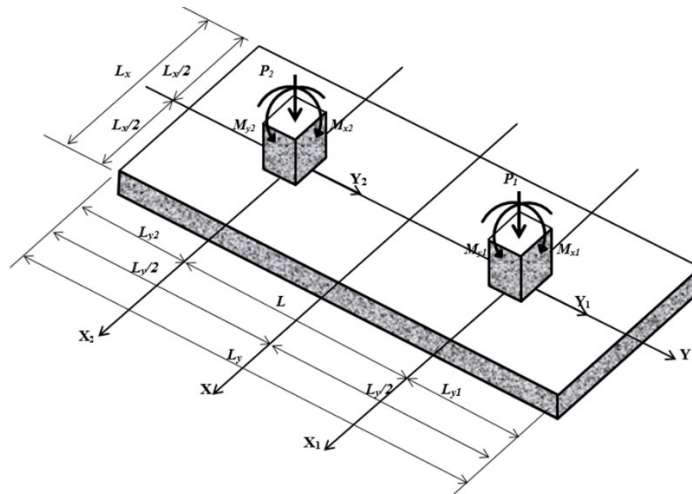


Figura 1. ZCR submetida à flexão biaxial.

Fonte: Elaboração própria.

As sapatas combinadas retangulares (ZCRs) rígidas deformam-se de forma plana, ou seja, considera-se que o diagrama de distribuição das pressões do solo sob a sapata seja linear.

As equações gerais para a flexão de ZCRs devido às cargas majoradas são (Montes-Páramo et al., 2023):

Flexão biaxial:

A pressão na direção principal (eixo Y) é:

$$\sigma_u(x, y) = \frac{R_u}{L_x L_y} + \frac{12 M_{uxT} y}{L_x L_y^3} + \frac{12 M_{uyT} x}{L_x^3 L_y} \quad (1)$$

A pressão na direção transversal à direção principal (eixo X), para P_{u1} sobre os eixos X_1 e Y_1 , é:

$$\sigma_{uP1}(x_1, y_1) = \frac{P_{u1}}{L_x w_1} + \frac{12 M_{ux1} y_1}{L_x w_1^3} + \frac{12 M_{uy1} x_1}{L_x^3 w_1} \quad (2)$$

A pressão na direção transversal à direção principal (eixo X), para P_{u2} sobre os eixos X_2 e Y_2 , é:

$$\sigma_{uP2}(x_2, y_2) = \frac{P_{u2}}{L_x w_2} + \frac{12 M_{ux2} y_2}{L_x w_2^3} + \frac{12 M_{uy2} x_2}{L_x^3 w_2} \quad (3)$$

Flexão uniaxial (Ru encontra-se no eixo Y):

A pressão para cada caso é obtida substituindo M_{uy1} , M_{uy2} y $M_{uyT} = 0$ nas equações (1)–(3).

Flexão uniaxial (Ru encontra-se no eixo X):

A pressão para cada caso é obtida substituindo M_{ux1} , M_{ux2} y $M_{uxT} = 0$ nas equações (1)–(3).

Onde: σ_u , σ_{uP1} y σ_{uP2} são as pressões últimas geradas pelo solo em qualquer ponto da sapata; Ru (força resultante última) = $P_{u1} + P_{u2}$, P_{u1} y P_{u2} são as cargas axiais últimas aplicadas sobre a sapata devido às colunas 1 e 2; (x, y) , $(x1, y1)$, $(x2, y2)$ são as coordenadas nas quais se localiza a pressão última gerada pelo solo, correspondentes aos eixos de análise; Lx e Ly são as dimensões laterais da sapata; $MuxT$ (momento resultante último em torno do eixo X) = $M_{ux1} + M_{ux2} + P_{u1}(L_y/2 - L_{y1}) - P_{u2}(L_y/2 - L_{y2})$, M_{ux1} y M_{ux2} são os momentos em torno dos eixos X1 e X2; $MuyT$ (momento resultante último em torno do eixo Y) = $M_{uy1} + M_{uy2}$, M_{uy1} y M_{uy2} são os momentos em torno dos eixos Y1 e Y2; $w1$ (largura de análise da coluna 1) = $c_{1y} + d$ y $w2$ (largura de análise da coluna 2) = $c_{2y} + d$.

As equações (1)–(3), ou equações de flexão biaxial e uniaxial, podem ser aplicadas quando a força resultante última Ru se encontra dentro do núcleo central (a superfície em contato com o solo está totalmente comprimida). Entretanto, quando a força resultante última Ru se encontra fora do núcleo central (a superfície em contato com o solo está parcialmente comprimida), essas equações não são válidas.

Quando a força resultante última Ru se encontra fora do núcleo central, as equações gerais da pressão gerada pelo solo sob a sapata submetida à flexão uniaxial e biaxial são:

Flexão biaxial (Montes-Páramo et al., 2023):

A pressão na direção principal (eixo Y) é:

$$\sigma_{zu}(x, y) = \frac{\sigma_{umax}[L_{y3}(2x - L_x) + L_{x3}(2y - L_y) + 2L_{x3}L_{y3}]}{2L_{x3}L_{y3}} \quad (4)$$

A pressão na direção transversal à direção principal (eixo X), para $Pu1$ sobre os eixos X1 e Y1 (alterando as coordenadas para o centro da coluna 1), é:

$$\sigma_{zuP1}(x_1, y_1) = \frac{\sigma_{umax}[L_{y3}(2x_1 - L_x) + 2L_{x3}(y_1 - L_{y1}) + 2L_{x3}L_{y3}]}{2L_{x3}L_{y3}} \quad (5)$$

A pressão na direção transversal à direção principal (eixo X), para $Pu2$ sobre os eixos X2 e Y2 (alterando as coordenadas para o centro da coluna 2), é:

$$\sigma_{zuP2}(x_2, y_2) = \frac{\sigma_{umax}[L_{y3}(2x_2 - L_x) + 2L_{x3}(y_2 - L - L_{y1}) + 2L_{x3}L_{y3}]}{2L_{x3}L_{y3}} \quad (6)$$

Flexão uniaxial (Ru encontra-se no eixo Y) (Montes-Páramo et al., 2023):

A pressão na direção principal (eixo Y) é:

$$\sigma_{zu}(x, y) = \frac{\sigma_{umax}(2L_{y3} - L_y + 2y)}{2L_{y3}} \quad (7)$$

A pressão na direção transversal à direção principal (eixo X), para $Pu1$ sobre os eixos X1 e Y1 (alterando as coordenadas para o centro da coluna 1), é:

$$\sigma_{zuP1}(x_1, y_1) = \frac{\sigma_{umax}(L_{y3} - L_{y1} + y_1)}{L_{y3}} \quad (8)$$

A pressão na direção transversal à direção principal (eixo X), para $Pu2$ sobre os eixos X_2 e Y_2 (alterando as coordenadas para o centro da coluna 2), é:

$$\sigma_{zuP2}(x_2, y_2) = \frac{\sigma_{umax}(L_{y3} - L - L_{y1} + y_2)}{L_{y3}} \quad (9)$$

Flexão uniaxial (Ru encontra-se no eixo X) (Montes-Páramo et al., 2023):

A pressão na direção principal (eixo Y) é:

$$\sigma_{zu}(x, y) = \frac{\sigma_{umax}(2L_{x3} - L_x + 2x)}{2L_{x3}} \quad (10)$$

A pressão na direção transversal à direção principal (eixo X), para $Pu1$ sobre os eixos X_1 e Y_1 (alterando as coordenadas para o centro da coluna 1), é:

$$\sigma_{zuP1}(x_1, y_1) = \frac{\sigma_{umax}(2L_{x3} - L_x + 2x_1)}{2L_{x3}} \quad (11)$$

A pressão na direção transversal à direção principal (eixo X), para $Pu2$ sobre os eixos X_2 e Y_2 (alterando as coordenadas para o centro da coluna 2), é:

$$\sigma_{zuP2}(x_2, y_2) = \frac{\sigma_{umax}(2L_{x3} - L_x + 2x_2)}{2L_{x3}} \quad (12)$$

Onde: σ_{umax} é a pressão máxima última que o solo deve suportar devido às cargas axiais últimas e aos momentos últimos atuantes sobre a sapata.

As seções críticas para os momentos estão localizadas nas faces das colunas e no intervalo entre as duas colunas. As seções críticas para o cisalhamento por flexão estão localizadas a uma distância dp (altura útil da sapata) a partir das faces das colunas, enquanto, para o cisalhamento por punção, as seções críticas estão localizadas em um perímetro definido a uma distância $dp/2$ a partir das faces das colunas (ACI 318S-19).

2.1 ZCR sob flexão biaxial.

A Figura 2 apresenta os cinco casos possíveis para determinar a superfície mínima de uma ZCR submetida a uma carga axial e a dois momentos ortogonais em cada coluna.

O Caso I considera que toda a superfície inferior da sapata está totalmente comprimida. A pressão exercida pelo solo sobre a sapata é determinada pelas equações (1)–(3).

Os Casos II, III, IV e V consideram que a superfície inferior da sapata está parcialmente comprimida, ou seja, parte da superfície de contato não está submetida à pressão. A pressão exercida pelo solo sobre a sapata é determinada pelas equações (4)–(6).

2.1.1. Momentos e esforços cortantes por flexão.

Os momentos últimos M_{ua} , M_{ub} , M_{uc} , M_{ud} , M_{ue} , M_{uf} y M_{ug} estão localizados nos eixos $a-a$, $b-b$, $c-c$, $d-d$, $e-e$, $f-f$ e $g-g$, e os esforços cortantes últimos por flexão V_{uh} , V_{ui} , V_{uj} , V_{uk} , V_{ul} y V_{um} estão localizados nos eixos $h-h$, $i-i$, $j-j$, $k-k$, $l-l$ e $m-m$.

A Figura 3 apresenta as seções críticas dos momentos últimos e dos esforços cortantes últimos por flexão em relação ao eixo X, para os cinco casos.

Caso I nos eixos X e Y.

A Figura 3(a) apresenta as seções críticas para o Caso I, e as equações gerais nos eixos X e Y são:

$$V_{ux} = - \int_{y_1}^{\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_u dx dy \quad (13)$$

Substituindo a equação (1) e $y_l = L_{y2} + L + c_{ly}/2 + d - L_y/2$ na equação (13), obtém-se V_{uh} .

Somando P_{ul} e substituindo a equação (1) e $y_l = L_{y2} + L - c_{ly}/2 - d - L_y/2$ na equação (13), obtém-se V_{ui} .

Somando P_{ul} e substituindo a equação (1) e $y_l = L_{y2} + c_{2y}/2 + d - L_y/2$ na equação (13), obtém-se V_{uj} .

Somando R_u e substituindo a equação (1) e $y_l = L_{y2} - c_{2y}/2 - d - L_y/2$ na equação (13), obtém-se V_{uk} .

$$M_{ux} = - \int_{y_1}^{\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_u (y - y_1) dx dy \quad (14)$$

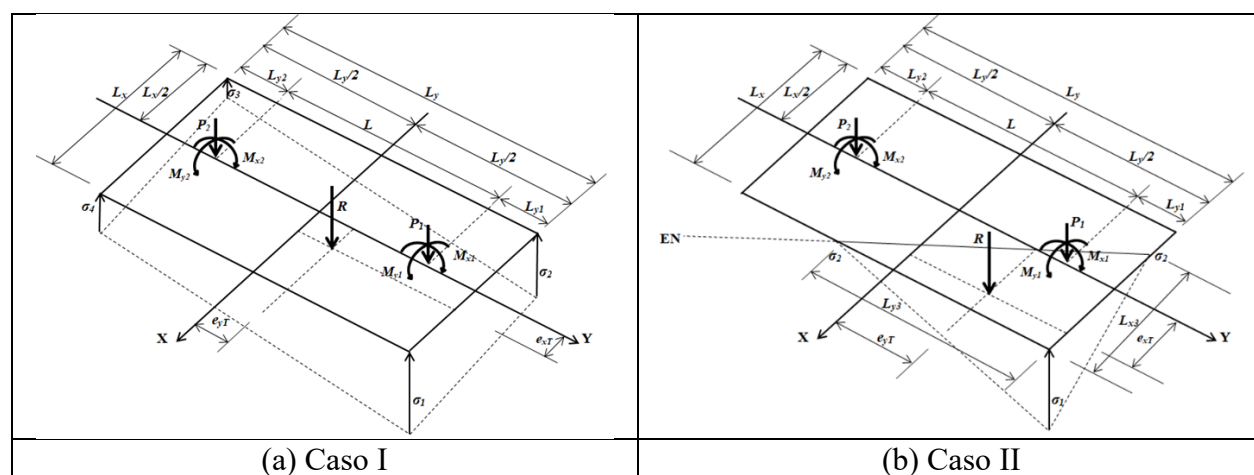
Substituindo a equação (1) y $y_l = L_{y2} + L + c_{ly}/2 - L_y/2$ na equação(14) se obtém-se M_{ua} .

Somando $P_{ul}c_{ly}/2 + M_{uxl}$ e substituindo a equação (1) y $y_l = L_{y2} + L - c_{ly}/2 - L_y/2$ na equação: (14) se obtém -se M_{ub} .

Somando $P_{ul}(L - c_{2y}/2) + M_{uxl}$ e substituindo a equação (1) y $y_l = L_{y2} + c_{2y}/2 - L_y/2$ na equação (14) se obtém-se M_{ud} .

Somando $P_{ul}(L + c_{2y}/2) + P_{u2}c_{2y}/2 + M_{uxl} + M_{ux2}$ e substituindo na equação (1) y $y_l = L_{y2} - c_{2y}/2 - L_y/2$ na equação (14) se obtém-se M_{ue} .

Somando $P_{ul}(L_y/2 - L_{yl} - y_l) + M_{uxl}$ e substituirindo a equação (1) na equação(14) desenvolve-se a integral. Posteriormente, deriva-se a expressão em relação a y_l e iguala-se essa equação a zero para determinar o ponto em que o momento é máximo. Esse ponto é então substituído na mesma equação para obter M_{uc} ou momento último máximo.



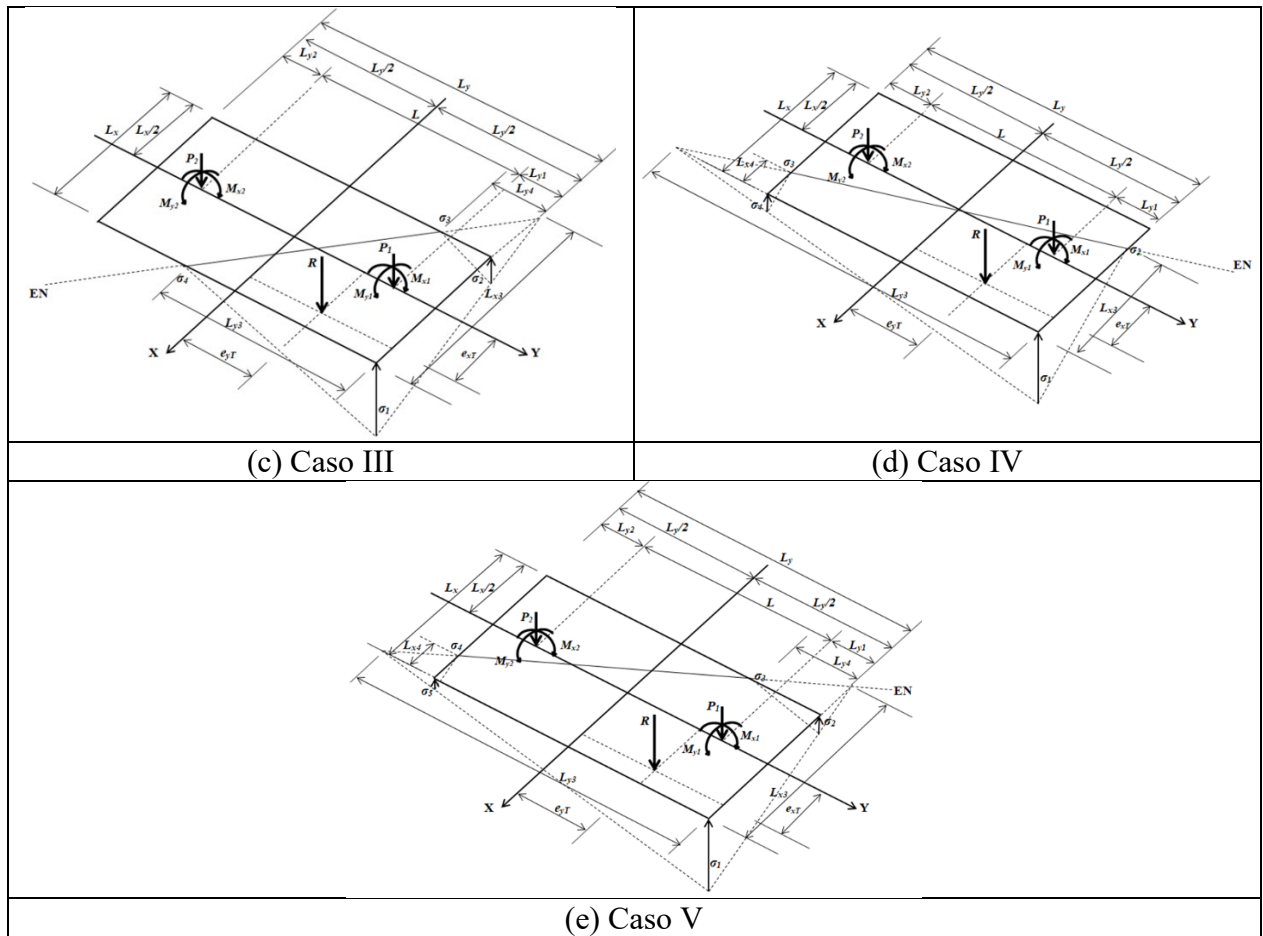
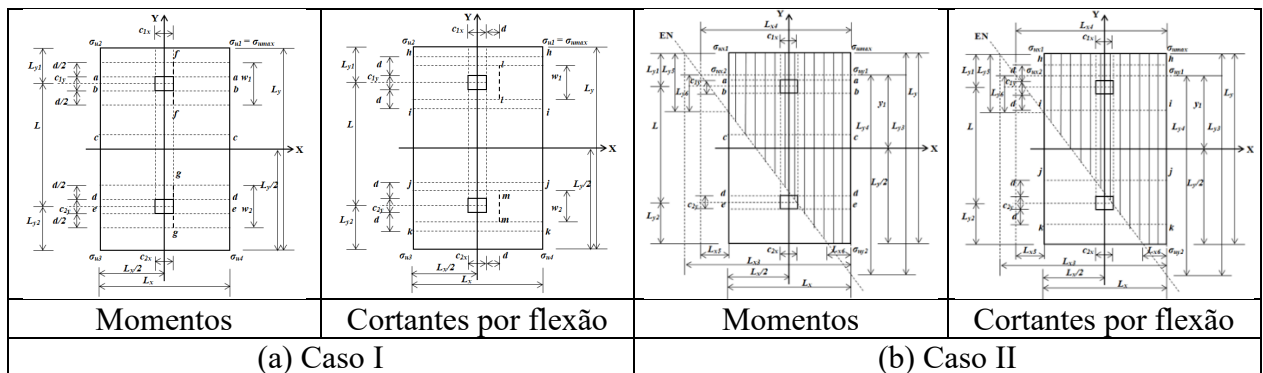


Figura 2. Cinco casos possíveis para uma ZCR submetida à flexão biaxial.
Fonte: Elaboração própria a partir de Montes-Páramo et al. (2023).

As equações gerais para os esforços cortantes últimos por flexão e os momentos últimos em relação ao eixo Y são:

$$V_{ul} = - \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{w_1}{2}}^{\frac{w_1}{2}} \sigma_{uP1} dy dx \quad (15)$$



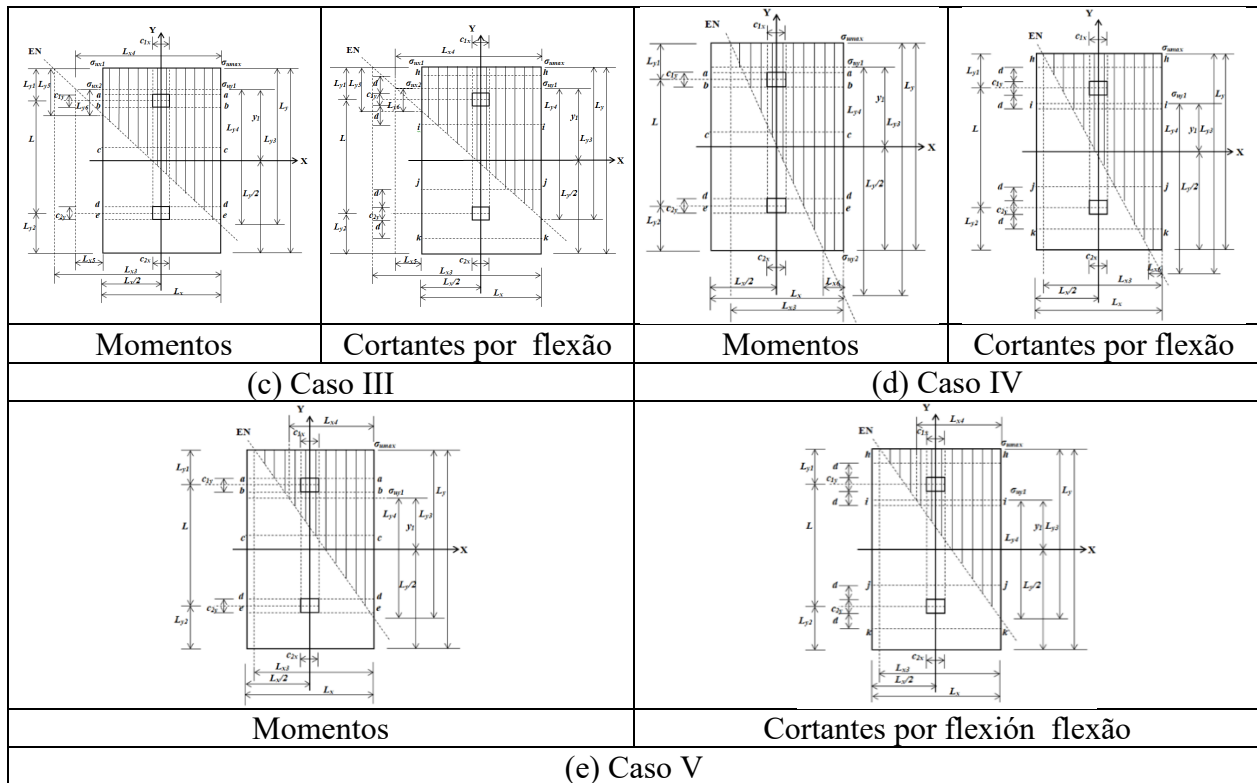


Figura 3. Casos I, II, III, IV e V em relação ao eixo X.

Fonte: Elaboração própria.

Substituindo a equação (2) e $x_1 = c_{1x}/2 + d$ na equação (15), determina-se V_{ul} .

$$V_{um} = - \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{w_2}{2}}^{\frac{w_2}{2}} \sigma_{uP2} dy dx \quad (16)$$

Substituindo a equação (3) e $x_2 = c_{2x}/2 + d$ na equação (16), determina-se V_{um} .

$$M_{uf} = - \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{w_1}{2}}^{\frac{w_1}{2}} \sigma_{uP1} (x - x_1) dy dx \quad (17)$$

Substituindo a equação (2) e $x_1 = c_{1x}/2$ na equação (17), determina-se M_{uf} .

$$M_{ug} = - \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{w_2}{2}}^{\frac{w_2}{2}} \sigma_{uP2} (x - x_2) dy dx \quad (18)$$

Substituindo a equação (3) e $y = c_{2y}/2$ na equação (18), obtém-se M_{ug} .

Caso II em relação ao eixo X.

A Figura 3(b) apresenta as seções críticas para o Caso II, e as equações gerais em relação ao eixo X são:

Para $L_y/2 \geq y_l \geq -L_y/2$

Quando $y_l \geq L_y/2 - L_{y5} + c_{ly}/2 + d$

$$V_{ux} = - \int_{y_1}^{\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zu} dx dy \quad (19)$$

Quando $y_l \leq L_y/2 - L_{y5} + c_{ly}/2 + d$

$$V_{ux} = - \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y5}}^{\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_z dx dy - \int_{y_1}^{\frac{L_y}{2} - L_{y5}} \int_{\frac{L_x}{2} + \frac{L_{x3}(L_y - 2y)}{2L_{y3}} - L_{x3}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zu} dx dy \quad (20)$$

Onde: $L_{y5} = L_{y3}(L_{x3} - L_x)/L_{x3}$.

Substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + L + c_{ly}/2 + d - L_y/2$ na equação (19) ou na equação (20), conforme o caso, obtém-se V_{uh}

Somando P_{ul} e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + L - c_{ly}/2 - d - L_y/2$ na equação (19) ou na equação (20), conforme o caso, obtém-se V_{uj} .

Somando P_{ul} e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + c_{2y}/2 + d - L_y/2$ na equação (19) ou na equação (20), conforme o caso, obtém-se V_{uj} .

Somando R_u e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} - c_{2y}/2 - d - L_y/2$ na equação (19) ou na equação (20), conforme o caso, obtém-se V_{uk} .

Quando $y_l \geq L_y/2 - L_{y5} + c_{ly}/2$

$$M_{ux} = - \int_{y_1}^{\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zu}(y - y_1) dx dy \quad (21)$$

Quando $y_l \leq L_y/2 - L_{y5} + c_{ly}/2$

$$M_{ux} = - \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y5}}^{\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zu}(y - y_1) dx dy - \int_{y_1}^{\frac{L_y}{2} - L_{y5}} \int_{\frac{L_x}{2} + \frac{L_{x3}(L_y - 2y)}{2L_{y3}} - L_{x3}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zu}(y - y_1) dx dy \quad (22)$$

Substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + L + c_{ly}/2 - L_y/2$ u na equação (22), conforme o caso, obtém-se M_{ua} .

Somando $P_{ul}c_{ly}/2 + M_{uxl}$ e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + L - c_{ly}/2 - L_y/2$ na equação (21) ou na equação (22), conforme o caso, obtém-se M_{ub} .

Somando $P_{ul}(L - c_{2y}/2) + M_{uxl}$ e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + c_{2y}/2 - L_y/2$ na equação (21) ou na equação (22), conforme o caso, obtém-se M_{ud} .

Somando $P_{ul}(L + c_{2y}/2) + P_{u2}c_{2y}/2 + M_{uxl} + M_{ux2}$ e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} - c_{2y}/2 - L_y/2$ na equação (21) ou na equação (22), conforme o caso, obtém-se M_{ue} .

Somando $P_{ul}(L_{y2} - L_{yl} - y_l) + M_{uxl}$ e substituindo a equação (4) na equação (21) ou na equação (22), conforme o caso, desenvolve-se a integral. Posteriormente, deriva-se a expressão em relação a y_l e iguala-se essa equação a zero para determinar o ponto em que o momento é máximo. Esse ponto é então substituído na mesma equação para obter M_{uc} , ou momento último máximo.

Caso III em relação ao eixo X.

A **Figura 3(c)** apresenta as seções críticas para o **Caso III**, e as equações gerais em relação ao **eixo X** são:

O **Caso III** é igual ao **Caso II**, porém $L_y/2 \geq y_l \geq L_y/2 - L_{y3}$.

Caso IV em relação ao eixo X

A **Figura 3(d)** apresenta as seções críticas para o **Caso IV**, e as equações gerais em relação ao eixo **X** são:

Para $L_y/2 \geq y_l \geq -L_y/2$

$$V_{ux} = - \int_{y_1}^{\frac{L_y}{2}} \int_{\frac{L_x}{2} + \frac{L_{x3}(L_y - 2y)}{2L_{y3}} - L_{x3}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zu} dx dy \quad (23)$$

Substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + L + c_{ly}/2 + d - L_y/2$ na equação (23) se obtém V_{uh} .

Somando P_{ul} e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + L - c_{ly}/2 - d - L_y/2$ na equação (23), obtém-se V_{ui}

Somando P_{ul} e substituindo na equação (4) e $y_l = L_{y2} + c_{2y}/2 + d - L_y/2$ na equação (23) obtém-se V_{uj} .

Somando R_u e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} - c_{2y}/2 - d - L_y/2$ na equação (23) obtém-se V_{uk} .

$$M_{ux} = - \int_{y_1}^{\frac{L_y}{2}} \int_{\frac{L_x}{2} + \frac{L_{x3}(L_y - 2y)}{2L_{y3}} - L_{x3}}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zu}(y - y_1) dx dy \quad (24)$$

Substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + L + c_{ly}/2 - L_y/2$ na equação (24), obtém-se M_{ua} .

Somando $P_{ul}c_{ly}/2 + M_{uxl}$ e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + L - c_{ly}/2 - L_y/2$ na equação (24) obtém-se M_{ub} .

Somando $P_{ul}(L - c_{2y}/2) + M_{uxl}$ e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} + c_{2y}/2 - L_y/2$ na equação (24) obtém-se M_{ud} .

Somando $P_{ul}(L + c_{2y}/2) + P_{u2}c_{2y}/2 + M_{uxl} + M_{ux2}$ e substituindo a equação (4) e $y_l = L_{y2} - c_{2y}/2 - L_y/2$ na equação (24) obtém-se M_{ue} .

Somando $P_{ul}(L_y/2 - L_{yl} - y_l) + M_{uxl}$ e substituindo a equação (4) na equação (24) desenvolve-se a integral. Posteriormente, deriva-se a expressão em relação a y_l iguala-se essa equação a zero para determinar o ponto em que o momento é máximo. Esse ponto é então substituído na mesma equação para obter M_{uc} ou momento último máximo.

Caso V em relação ao eixo X.

A **Figura 3(e)** apresenta as seções críticas para o **Caso V**, e as equações gerais em relação ao eixo **X** são:

O **Caso V** é igual ao caso IV, porém $L_y/2 \geq y_l \geq L_y/2 - L_{y3}$.

Casos II, III, IV e V em relação ao eixo Y.

A **Figura 4** apresenta as seções críticas para os momentos e esforços cortantes por flexão dos Casos II, III, IV e V em relação ao eixo **Y**.

Forças cortantes e momentos em relação ao eixo Y para P1.

Caso A. Quando $L_{x4}, L_{x5} \geq L_x/2 - x_l$

donde: $L_{x4} = L_{x3}(2L_{y3} - 2L_{yl} + w_l)/2L_{y3}$ y $L_{x5} = L_{x3}(2L_{y3} - 2L_{yl} - w_l)/2L_{y3}$.

Onde: $L_{x4} = L_{x3}(2L_{y3} - 2L_{yl} + w_l)/2L_{y3}$ y $L_{x5} = L_{x3}(2L_{y3} - 2L_{yl} - w_l)/2L_{y3}$.

$$V_{ul} = - \int_{-\frac{w_1}{2}}^{\frac{w_1}{2}} \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP1} dx dy \quad (25)$$

Substituindo a equação (5) e $x_l = c_{lx}/2 + d$ na equação (25) obtém-se V_{ul} .

$$M_{uf} = - \int_{-\frac{w_1}{2}}^{\frac{w_1}{2}} \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP1} (x - x_1) dx dy \quad (26)$$

Substituindo a equação (5) e $y_{x_l} = c_{lx}/2$ na equação (26) obtém-se M_{uf} .

Caso B. Quando $L_{x4} \geq L_x/2 - x_l \geq L_{x5}$

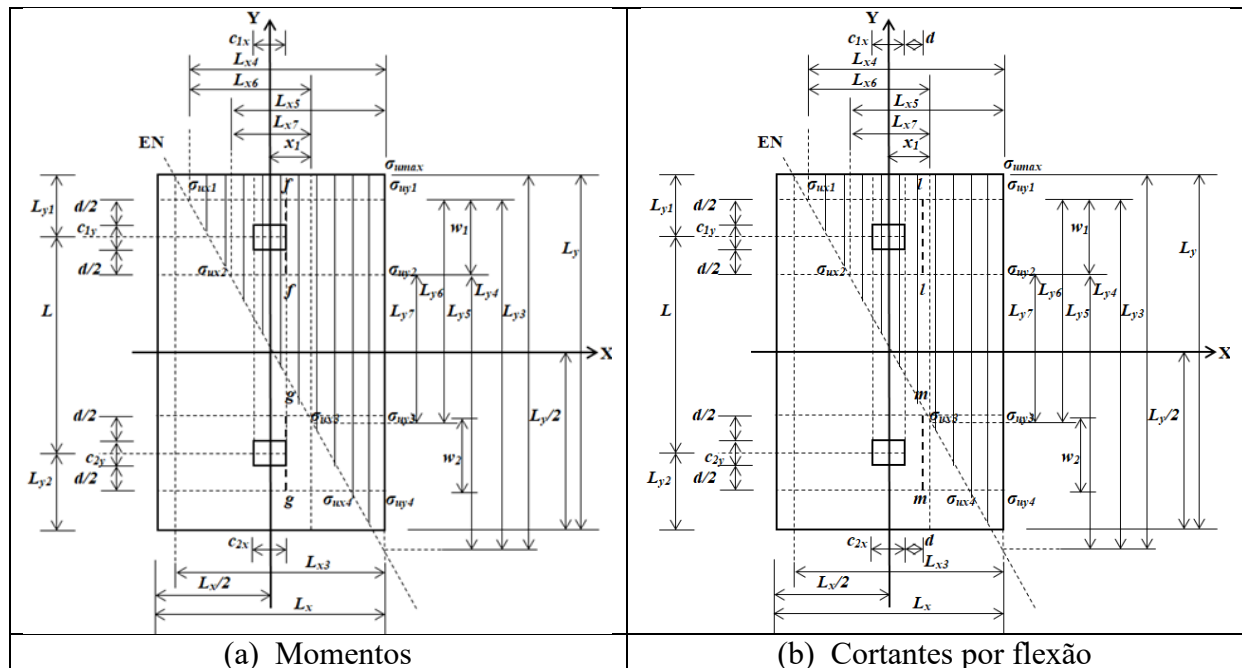
$$V_{ul} = - \int_{L_{y6}}^{\frac{w_1}{2}} \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP1} dx dy - \int_{-\frac{w_1}{2}}^{L_{y6}} \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP1} dx dy \quad (27)$$

Onde: $L_{y6} = L_{y1} + L_{y3}(L_x - 2L_{x3} - 2x_l)/2L_{x3}$ y $x_2 = L_x/2 + L_{x3}(L_{y1} - L_{y3} - y)/L_{y3}$.

Substituindo a equação (5) e $x_l = c_{lx}/2 + d$ na equação (27) s=obtem-se V_{ul} .

$$M_{uf} = - \int_{L_{y6}}^{\frac{w_1}{2}} \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP1} (x - x_1) dx dy - \int_{-\frac{w_1}{2}}^{L_{y6}} \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP1} (x - x_1) dx dy \quad (28)$$

Substituindo a equação (5) e $x_l = c_{lx}/2$ na equação (2) s=obtem-se M_{uf}



Caso C.

Quando $L_x/2 - x_l \geq L_{x4}$ y L_{x5}

$$V_{ul} = - \int_{-\frac{w_1}{2}}^{\frac{w_1}{2}} \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP1} dx dy \quad (29)$$

Onde: $x_2 = L_x/2 + L_{x3}(L_{y1} - L_{y3} - y)/L_{y3}$.

Substituindo a equação (5) na equação (29) determina-se V_{ul} .

$$M_{uf} = - \int_{-\frac{w_1}{2}}^{\frac{w_1}{2}} \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP1} (x - x_1) dx dy \quad (30)$$

Substituindo a equação (5) e $x_l = c_{lx}/2$ na equação (30) obtém-se M_{uf} .

Força cortante e momento sobre o eixo Y para P2.
Caso A.

Quando $L_{x4}, L_{x5} \geq L_x/2 - x_l$

Onde: $L_{x4} = L_{x3}(2L_{y3} - 2L_{y1} + w_2)/2L_{y3}$ y $L_{x5} = L_{x3}(2L_{y3} - 2L_{y1} - w_2)/2L_{y3}$.

$$V_{um} = - \int_{-\frac{w_2}{2}}^{\frac{w_2}{2}} \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP2} dx dy \quad (31)$$

Substituindo a equação (6) e $x_l = c_{2x}/2 + d$ na equação (31) determina-se V_{um} .

$$M_{ug} = - \int_{-\frac{w_2}{2}}^{\frac{w_2}{2}} \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP2} (x - x_1) dx dy \quad (32)$$

Substituindo a equação (6) e $x_l = c_{2x}/2$ na equação (32) obtém-se M_{ug}

Caso B. Quando $L_{x4} \geq L_x/2 - x_l \geq L_{x5}$

$$V_{um} = - \int_{L_{y6}}^{\frac{w_2}{2}} \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP2} dx dy - \int_{-\frac{w_2}{2}}^{L_{y6}} \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP2} dx dy \quad (33)$$

Onde : $L_{y6} = L_{y1} + L_{y3}(L_x - 2L_{x3} - 2x_l)/2L_{x3}$ y $x_2 = L_x/2 + L_{x3}(L_{y1} - L_{y3} - y)/L_{y3}$.

Substituindo a equação (6) e $x_l = c_{2x}/2 + d$ na equação (33) obtém-se V_{um}

$$M_{ug} = - \int_{L_{y6}}^{\frac{w_2}{2}} \int_{x_1}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP2} (x - x_1) dx dy - \int_{-\frac{w_2}{2}}^{L_{y6}} \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP2} (x - x_1) dx dy \quad (34)$$

Substituindo a equação (6) e $x_l = c_{2x}/2$ na equação (34) obtém-se M_{ug}

Caso C.

Quando $L_x/2 - x_l \geq L_{x4}$ y L_{x5}

$$V_{um} = - \int_{-\frac{w_1}{2}}^{\frac{w_2}{2}} \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP2} dx dy \quad (35)$$

Onde: $x_2 = L_x/2 + L_{x3}(L_{y1} - L_{y3} - y)/L_{y3}$.

Substituindo a equação (6) na equação (35) determina-se V_{um} .

$$M_{ug} = - \int_{-\frac{w_2}{2}}^{\frac{w_2}{2}} \int_{x_2}^{\frac{L_x}{2}} \sigma_{zuP2} (x - x_1) dx dy \quad (36)$$

Substituindo a equação (6) e $x_l = c_{2x}/2$ na equação (36) determina-se M_{ug} .

2.1.2. Esforços cortantes por punção

Os esforços cortantes por punção V_{up1} y V_{up2} ocorrem no perímetro formado pelos pontos 1, 2, 3 e 4, para a coluna 1, e pelos pontos 5, 6, 7 e 8, para a coluna 2.

A Figura 5 mostra as seções críticas para cortadores de cisalhamento de punção para todos os casos.

Caso I

$$V_{up1} = P_{u1} - \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - \frac{c_{1y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{-\frac{c_{1x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_u dx dy \quad (37)$$

$$V_{up2} = P_{u2} - \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L - \frac{c_{2y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{-\frac{c_{2x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{2x}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_u dx dy \quad (38)$$

Substituindo a equação (1) nas equações (37) e (38) obtém-se V_{up1} e V_{up2} .

Caso IIA

$$V_{up1} = P_{u1} - \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - \frac{c_{1y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{-\frac{c_{1x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{zu} dx dy \quad (39)$$

$$V_{up2} = P_{u2} - \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L - \frac{c_{2y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{-\frac{c_{2x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{2x}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{zu} dx dy \quad (40)$$

Substituindo a equação (4) nas equações (39) e (40) obtém-se V_{up1} e V_{up2} .

Caso IIB

Para V_{up1} é a equação (39) e para $V_{up2} = P_{u2}$.

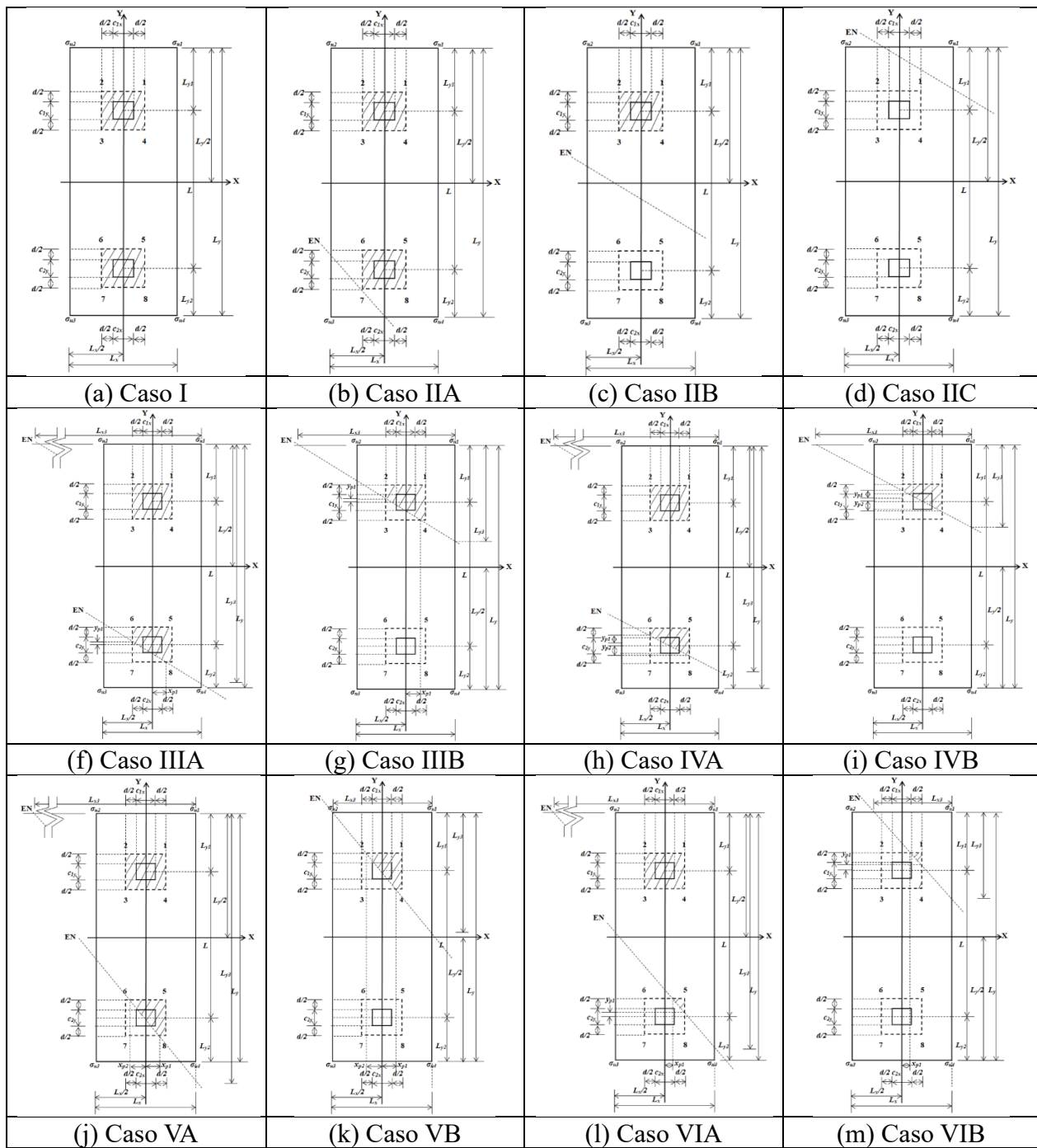


Figura 5. Esfuerzo cortante por puncción para flexão biaxial.

Fonte: Elaboração própria.

Caso IICPara $V_{up1} = P_{u1}$ e para $V_{up2} = P_{u2}$.**Caso IIIA**Para V_{up1} é a equação (39).

$$V_{up2} = P_{u2} - \int_{-\frac{c_{2x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{2x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{uz} dy dx - \int_{-\frac{c_{2x}}{2} - \frac{d}{2}}^{x_{p1}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + y_{p1}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + y_{p1}} \sigma_{uz} dy dx$$

$$- \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{2x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L - \frac{c_{2y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + y_{p1}} \sigma_{uz} dy dx$$
(41)

Onde: $x_{pl} = L_x/2 - L_{x3} + L_{x3}(2L_y - 2L_{y2} + c_{2y} + d)/2L_{y3}$ y $y_{pl} = L_y - L_{y2} - L_{y3} + L_{y3}(L_x + c_{2x} + d)/2L_{x3}$.

Caso IIIB

$$V_{up1} = P_{u1} - \int_{-\frac{c_{1x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{uz} dy dx - \int_{-\frac{c_{1x}}{2} - \frac{d}{2}}^{x_{p1}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + y_{p1}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + y_{p1}} \sigma_{uz} dy dx$$

$$- \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - \frac{c_{1y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + y_{p1}} \sigma_{uz} dy dx$$
(42)

Onde: $x_{pl} = L_x/2 - L_{x3} + L_{x3}(2L_{y1} + c_{1y} + d)/2L_{y3}$ y $y_{pl} = L_{y1} - L_{y3} + L_{y3}(L_x + c_{1x} + d)/2L_{x3}$.

Para $V_{up2} = P_{u2}$.

Caso IVA

Para V_{up1} é a equação (39).

$$V_{up2} = P_{u2} - \int_{-\frac{c_{2x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{2x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{uz} dy dx$$
(43)

Caso IVB

$$V_{up1} = P_{u1} - \int_{-\frac{c_{1x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{uz} dy dx$$
(44)

Para $V_{up2} = P_{u2}$.

Caso VA

Para V_{up1} é a equação (39).

$$V_{up2} = P_{u2} - \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{2x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_z dy dx - \int_{-\frac{c_{2x}}{2} - \frac{d}{2}}^{x_{p1}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L - \frac{c_{2y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_z dy dx$$
(45)

Onde: $x_{pl} = L_x/2 - L_{x3} + L_{x3}(2L_{y1} + 2L + c_{2y} + d)/2L_{y3}$.

Caso VB

$$V_{up1} = P_{u1} - \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - \frac{c_{1y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_z dy dx - \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{1x}}{2} - \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - \frac{L_{y3}(2x - L_x)}{2L_{x3}} - L_{y3}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_z dy dx \quad (46)$$

Onde: $x_{p1} = L_x/2 - L_{x3} + L_{x3}(2L_{y1} + c_{1y} + d)/2L_{y3}$.

Para $V_{up2} = P_{u2}$.

Caso VIA

Para V_{up1} é a equação (39)

$$V_{up2} = P_{u2} - \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{2x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_z dy dx \quad (47)$$

Onde: $x_{p1} = L_x/2 - L_{x3} + L_{x3}(2L_{y1} + 2L - c_{2y} - d)/2L_{y3}$.

Caso VIB

$$V_{up1} = P_{u1} - \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - \frac{L_{y3}(2x - L_x)}{2L_{x3}} - L_{y3}} \sigma_z dy dx \quad (48)$$

Onde: $x_{p1} = L_x/2 - L_{x3} + L_{x3}(2L_{y1} - c_{1y} - d)/2L_{y3}$.

Para $V_{up2} = P_{u2}$.

2.2. ZCR sob flexão uniaxial

Figura 6 apresenta os quatro casos possíveis para determinar a superfície mínima de uma ZCR submetida à flexão uniaxial.

Dois casos ocorrem quando R está localizado sobre o eixo Y: Caso Y-I: quando R está localizado no interior do núcleo central; Caso Y-II: quando R está localizado no exterior do núcleo central.

Dois casos ocorrem quando R está localizado sobre o eixo X: Caso X-I: quando R está localizado no interior do núcleo central; Caso X-II: quando R está localizado no exterior do núcleo central.

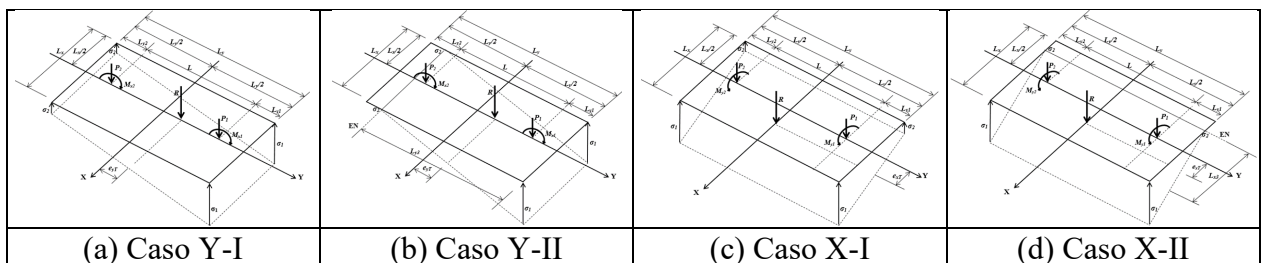


Figura 6. Quatro casos possíveis para uma ZCR submetida à flexão uniaxial.

Fonte: Elaboração própria a partir de Montes-Paramo et al. (2023).

Os Casos Y-I e X-I consideram que toda a área inferior da sapata está totalmente comprimida. A pressão exercida pelo solo sobre a sapata é determinada pelas equações (1)–(3). Entretanto, para o Caso Y-I, substituem-se M_{uy1} , M_{uy2} y $M_{uyT} = 0$ e, para o Caso X-I, substituem-se Y-I, y M_{ux1} , M_{ux2}

y $M_{uxT} = 0$

Os Casos Y-II e X-II consideram que a área inferior da sapata está parcialmente comprimida, ou seja, parte da área de contato não está submetida à pressão. A pressão exercida pelo solo sobre a sapata é determinada pelas equações (7)–(9), para o Caso Y-II, e pelas equações (10)–(12), para o Caso X-II.

2.2.1. Momentos e esforços cortantes por flexão

Os momentos últimos M_{ua} , M_{ub} , M_{uc} , M_{ud} , M_{ue} , M_{uf} y M_{ug} estão localizados nos eixos a-a, b-b, c-c, d-d, e-e, f-f e g-g, e os esforços cortantes últimos por flexão V_{uh} , V_{ui} , V_{uj} , V_{uk} , V_{ul} e V_{um} estão localizados nos eixos h-h, i-i, j-j, k-k, l-l e m-m.

A Figura 7 apresenta as seções críticas dos momentos últimos e dos esforços cortantes últimos por flexão para os quatro casos.

Caso Y-I

A Figura 7(a) representa as seções críticas para os momentos e esforços cortantes por flexão do Caso Y-I, sendo que as equações gerais em relação ao eixo X correspondem às equações (13) e (14), e, em relação ao eixo Y, às equações (15)–(18), porém substituindo $M_{uyT} = 0$

Caso Y-II

A Figura 7(b) representa as seções críticas para os momentos e esforços cortantes por flexão do Caso Y-II. As equações gerais em relação ao eixo X correspondem às equações (19) e (21), porém substituindo a equação (7) pela equação (4).

As equações gerais em relação ao eixo Y correspondem às equações (25) e (26) para P_{u1} , substituindo a equação (8) pela equação (5), e às equações (31) e (32) para P_{u2} , substituindo a equação (9) pela equação (6).

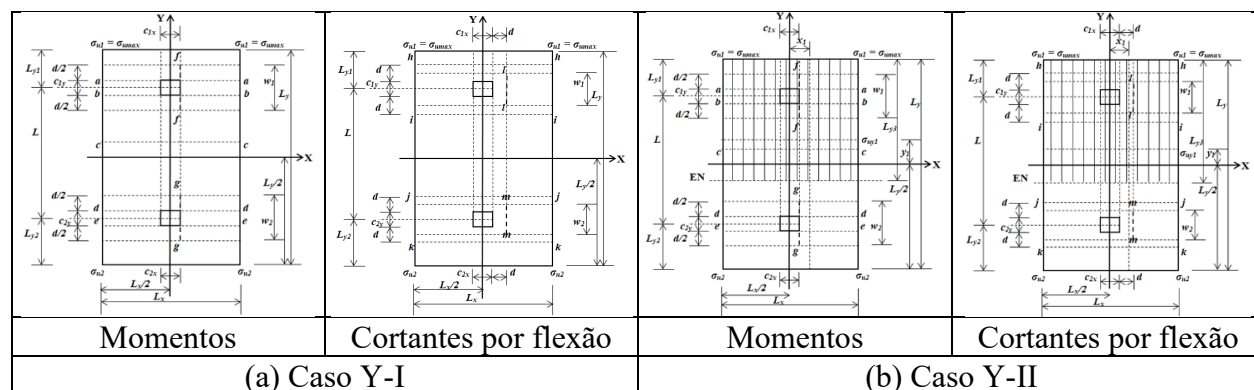
Caso X-I

A Figura 7(c) representa as seções críticas para os momentos e esforços cortantes por flexão do Caso X-I. As equações em relação ao eixo X correspondem às equações (13) e (14), e, em relação ao eixo Y, às equações (15)–(18), porém substituindo $M_{uxT} = 0$.

Caso X-II

A Figura 7(d) representa as seções críticas para os momentos e esforços cortantes por flexão do Caso X-II. As equações gerais em relação ao eixo X correspondem às equações (19) e (21), porém substituindo a equação (10) pela equação (4).

As equações gerais em relação ao eixo Y correspondem às equações (25) e (26) para P_{u1} , substituindo a equação (11) pela equação (5), e às equações (31) e (32) para P_{u2} , substituindo a equação (12) pela equação (6).



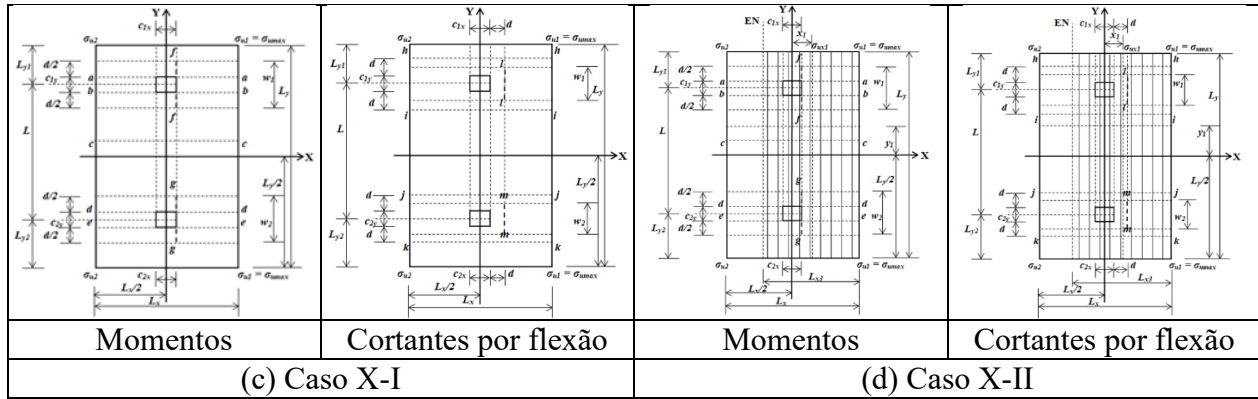


Figura 7. Casos Y-I, Y-II, X-I y X-II.

Fonte: elaboração própria

2.2.2. Esforços cortantes por punção

Os esforços cortantes por punção V_{Pu1} y V_{Pu2} ocorrem no perímetro formado pelos pontos 1, 2, 3 e 4, para a coluna 1, e pelos pontos 5, 6, 7 e 8, para a coluna 2.

A Figura 8 mostra as seções críticas para cisalhamento do punção em todos os casos.

Caso Y-I

As equações gerais para os esforços cortantes últimos por punção correspondem às equações (37) e (38), porém substituindo $M_{uyT} = 0$.

Caso Y-IIA

Para V_{up1} utiliza-se a equação (39), porém substituindo a equação (7) pela equação (4).

$$V_{up2} = P_{u2} - \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_2 y}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + y_{p1}} \int_{\frac{c_2 x}{2} + \frac{d}{2}}^{\frac{c_2 x}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{zu} dx dy \quad (49)$$

Onde: $y_{p1} = L_y - L_{y2} - L_{y3}$.

Substituindo a equação (7) na equação (49), obtém-se V_{up2} .

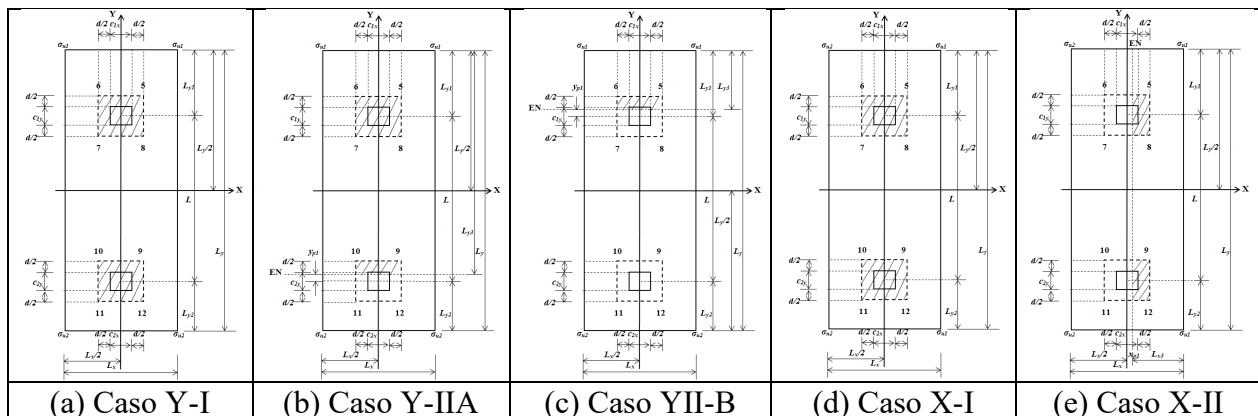


Figura 8. Esforço cortante por punção para flexão uniaxial.

Fonte: Elaboração própria.

Caso Y-IIB

$$V_{up1} = P_{u1} - \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + y_{p1}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{-\frac{c_{1x}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{zu}(x, y) dx dy \quad (50)$$

Onde: $y_{p1} = L_{y1} - L_{y3}$.

Substituindo a equação (7) na equação (50) obtém-se V_{up1} .

Para $V_{up2} = P_{u2}$.

Caso X-I

As equações gerais para os esforços cortantes por punção majorados correspondem às equações (37) e (38), porém substituindo $M_{uxT} = 0$.

Caso X-II

$$V_{up1} = P_{u1} - \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{1x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - \frac{c_{1y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} + \frac{c_{1y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{zu} dy dx \quad (51)$$

$$V_{up2} = P_{u2} - \int_{x_{p1}}^{\frac{c_{2x}}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L - \frac{c_{2y}}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{L_y}{2} - L_{y1} - L + \frac{c_{2y}}{2} + \frac{d}{2}} \sigma_{zu} dy dx \quad (52)$$

Onde: $x_{p1} = L_x/2 - L_{x3}$.

Substituindo a equação (10) nas equações (51) e (52) determina-se V_{up1} y V_{up2} .

3. APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO PROPOSTO

Nesta seção, apresenta-se a aplicação do modelo proposto com o objetivo de demonstrar suas vantagens em relação ao modelo atual. Os dados dos exemplos submetidos à flexão biaxial são: as dimensões das colunas são de 40×40 cm, $L = 6,00$ e $7,00$ m e $\sigma_{max} = 200$ kN/m², sendo a sapata submetida a $P_1 = 500$ kN ($P_{D1} = 300$ kN y $P_{L1} = 200$ kN), $M_{x1} = 1000$ kN-m ($M_{xD1} = 600$ kN-m y $M_{xL1} = 400$ kN-m), $M_{y1} = 250$ kN-m ($M_{yD1} = 150$ kN-m y $M_{yL1} = 100$ kN-m), $P_2 = 1000$ kN ($P_{D2} = 600$ kN y $P_{L2} = 400$ kN), $M_{x2} = 2000$ kN-m ($M_{xD2} = 1200$ kN-m y $M_{xL2} = 800$ kN-m), $M_{y2} = 500$ kN-m ($M_{yD2} = 300$ kN-m y $M_{yL2} = 200$ kN-m), para os quatro tipos de restrições na direção do eixo Y (sem restrições, limitado na coluna 1, limitado na coluna 2 e limitado nas duas colunas) (ver Figura 9). A área mínima e as dimensões laterais da ZCR, para os quatro tipos de restrições, coincidem em dois casos (sem restrições e limitado na coluna 2) e nos outros dois casos (limitado na coluna 1 e limitado nas duas colunas), conforme apresentado no trabalho proposto por Montes-Paramo et al. (2023). De acordo com o código ACI 318S-19, as cargas e os momentos últimos são obtidos da seguinte forma: $U = 1,2D + 1,6L$ onde U é a carga última ou momento último, D é a carga permanente ou momento devido à carga permanente, e L é a carga variável ou momento devido à carga variável. As cargas e os momentos últimos serão: $P_{u1} = 680$ kN, $M_{ux1} = 1360$ kN-m, $M_{uy1} = 340$ kN-m, $P_{u2} = 1360$ kN, $M_{ux2} = 2720$ kN-m, $M_{uy2} = 680$ kN-m, $\sigma_{umax} = 272$ kN/m². A pressão máxima última é obtida a partir das dimensões conhecidas e utilizando-se as cargas e os momentos últimos, por meio das equações (12) a (14) de Montes-Páramo et al. (2023).

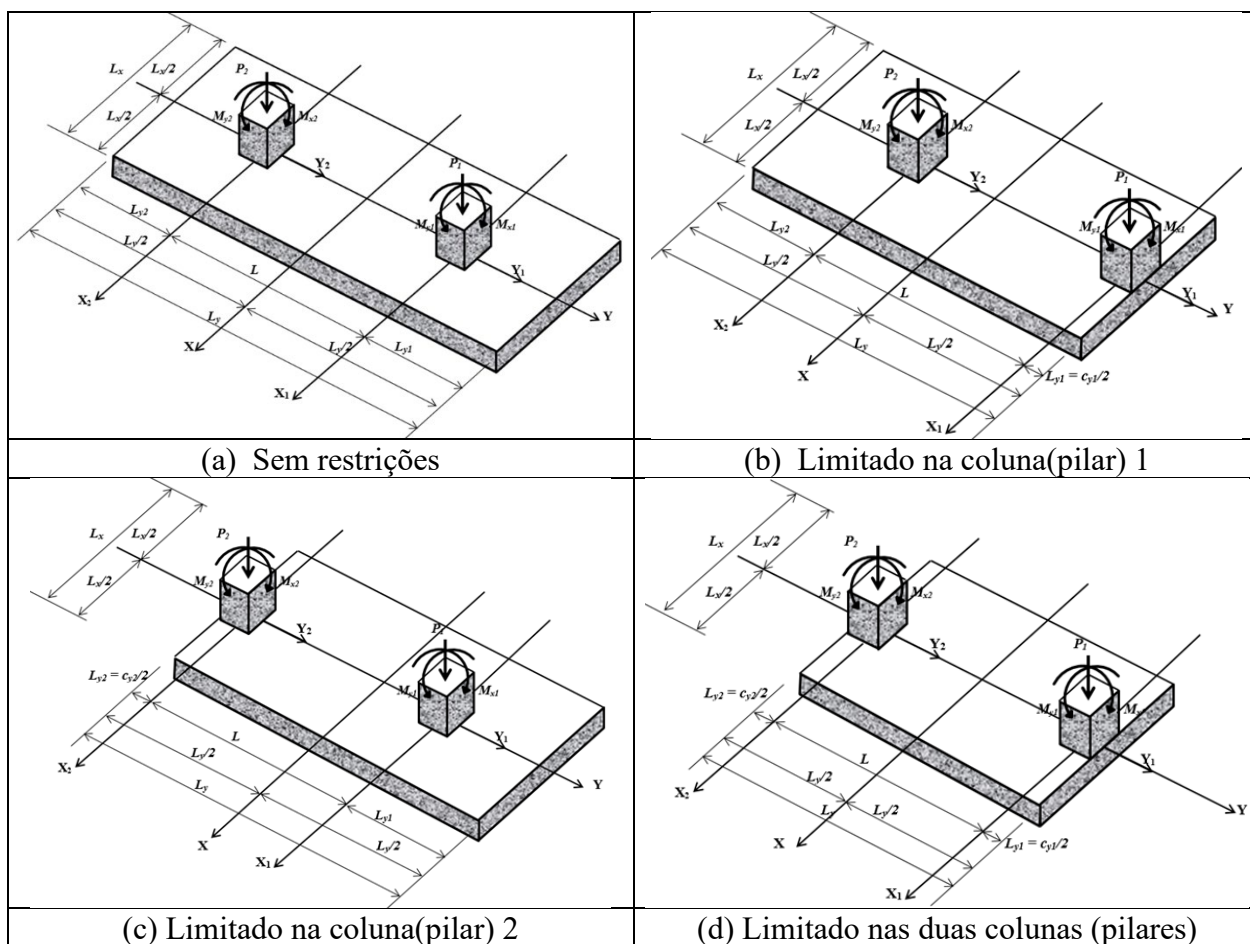


Figura 9. Quatro tipos de restrições na direção do eixo Y.

Fonte: Elaboração própria.

Para todos os exemplos, são utilizados $f'c$ (resistência do concreto aos 28 dias) = 21 MPa, f_y (resistência do aço no ponto de escoamento) = 420 MPa e r (cobrimento do concreto) = 8 cm.

A Tabela 1 apresenta detalhadamente o dimensionamento completo das ZCRs sob flexão biaxial (ver Anexo).

Os dados dos exemplos sob flexão uniaxial, para os dois casos, são:

1) Quando as cargas estão posicionadas sobre o eixo Y (Caso Y): as dimensões dos pilares são de 40×40 cm, $L = 6.00$ y 7.00 m y $\sigma_{max} = 200$ kN/m², e a sapata está submetida a $P_1 = 500$ kN ($P_{D1} = 300$ kN y $P_{L1} = 200$ kN), $M_{x1} = 1000$ kN-m ($M_{xD1} = 600$ kN-m y $M_{xL1} = 400$ kN-m), $M_{y1} = 0$ kN-m ($M_{yD1} = 0$ kN-m y $M_{yL1} = 0$ kN-m), $P_2 = 500$ kN ($P_{D2} = 300$ kN y $P_{L2} = 200$ kN), $M_{x2} = 2000$ kN-m ($M_{xD2} = 1200$ kN-m y $M_{xL2} = 800$ kN-m), $M_{y2} = 0$ kN-m ($M_{yD2} = 0$ kN-m y $M_{yL2} = 0$ kN-m). As cargas fatoradas e os momentos fatorados serão: $P_{u1} = 680$ kN, $M_{ux1} = 1360$ kN-m, $M_{uy1} = 0$ kN-m, $P_{u2} = 680$ kN, $M_{ux2} = 2720$ kN-m, $M_{uy2} = 0$ kN-m, $\sigma_{umax} = 272$ kN/m², a pressão máxima última é obtida utilizando-se as cargas últimas e os momentos últimos, a partir das equações (32) e (33) de Montes-Páramo et al. (2023).

2) Quando as cargas estão posicionadas sobre o eixo X (Caso X): as dimensões dos pilares são de 40×40 cm, $L = 6.00$ y 7.00 m y $\sigma_{max} = 200$ kN/m², e a sapata está submetida a $P_1 = 500$ kN ($P_{D1} = 300$ kN y $P_{L1} = 200$ kN), $M_{x1} = 0$ kN-m ($M_{xD1} = 0$ kN-m y $M_{xL1} = 0$ kN-m), $M_{y1} = 1000$ kN-m ($M_{yD1} = 600$ kN-m y $M_{yL1} = 400$ kN-m), $P_2 = 500$ kN ($P_{D2} = 300$ kN y $P_{L2} = 200$ kN), $M_{x2} = 0$ kN-m ($M_{xD2} = 0$ kN-m y $M_{xL2} = 0$ kN-m), $M_{y2} = 2000$ kN-m ($M_{yD2} = 1200$ kN-m y $M_{yL2} = 800$ kN-m). As cargas últimas e os momentos últimos serão: a pressão máxima última é obtida utilizando-se as cargas últimas e os momentos últimos, a partir das equações (41) e (42) de Montes-Páramo et al. (2023).

A área mínima e as dimensões laterais das ZCRs são apresentadas no documento proposto por Montes-Páramo et al. (2023).

A Tabela 2 apresenta detalhadamente o dimensionamento completo das ZCRs sob flexão uniaxial (ver Anexo).

4. 4 RESULTADOS

4.1 Verificação das equações para o dimensionamento completo das ZCRs submetidas à flexão biaxial.

4.1.1 Modelo atual ou Caso I.

Para os momentos: substituindo $y_l = L_y/2$ na equação (14) para o momento, obtém-se $M_{uao} = 0$ (momento na extremidade da sapata do lado do pilar 1). Agora, somando $P_{u1}(L + L_{y2}) + P_{u2}L_{y2} + M_{ux1} + M_{ux2}$ substituindo $y_l = -L_y/2$ na equação (14) para o momento, obtém-se $M_{ueo} = 0$ (momento na extremidade da sapata do lado do pilar 2).

Para os esforços cortantes por flexão: substituindo $y_l = L_y/2$ na equação (13) para o esforço cortante por flexão, obtém-se $V_{uho} = 0$ (esforço cortante por flexão na extremidade da sapata do lado do pilar 1). Agora, somando $P_{u1} + P_{u2}$ e substituindo $y_l = -L_y/2$ na equação (13) para o esforço cortante por flexão, obtém-se $V_{uko} = 0$ (esforço cortante por flexão na extremidade da sapata do lado do pilar 2).

4.1.2 Novo Modelo ou Casos II, III, IV e V

Para os momentos: substituindo $y_l = L_y/2$ na equação (21) ou (22) (casos II e III) e na equação (24) (casos IV e V), conforme o caso, obtém-se $M_{uao} = 0$ (momento na extremidade da sapata do lado do pilar 1). Agora, somando $P_{u1}(L + L_{y2}) + P_{u2}L_{y2} + M_{ux1} + M_{ux2}$ y e substituindo $y_l = -L_y/2$ na equação (21) ou (22) (casos II e III) e na equação (24) (casos IV e V), conforme o caso, obtém-se $M_{ueo} = 0$ (momento na extremidade da sapata do lado do pilar 2).

Para os esforços cortantes por flexão: substituindo $y_l = L_y/2$ a equação (19) ou (20) (casos II e III) e na equação (23) (casos IV e V), conforme o caso, para o esforço cortante por flexão, obtém-se $V_{uho} = 0$ (esforço cortante por flexão na extremidade da sapata do lado do pilar 1). Agora, somando $P_{u1} + P_{u2}$ y e substituindo $y_l = -L_y/2$ a equação (19) ou (20) (casos II e III) e na equação (23) (caso IV), conforme o caso, para o esforço cortante por flexão, obtém-se $V_{uko} = 0$ (esforço cortante por flexão na extremidade da sapata do lado do pilar 2).

4.2 Verificação das equações para o dimensionamento completo das ZCRs submetidas à flexão uniaxial

4.2.1 Modelo atual ou Casos Y-I e X-I

As equações são as mesmas utilizadas para a flexão biaxial, porém considerando $M_{uyT} = 0$ o $M_{uxT} = 0$ conforme o caso.

4.2.2 Novo Modelo ou Casos Y-II e X-II

As equações são as mesmas utilizadas para a flexão biaxial, porém considerando a equação (21) para o momento e a equação (19) para o esforço cortante por flexão, bem como $M_{uyT} = 0$ o $M_{uxT} = 0$ conforme o caso.

4.3 Resultados e discussões

Tabela 1 apresenta o seguinte (ver Anexo):

Para as sapatas com ambas as extremidades livres e restringidas em L_{y2} :

A espessura é determinada pelo esforço cortante por flexão em V_{um} para o caso I e em V_{uj} para o caso IV, para $L = 6,00$ e $7,00$ m.

As áreas de aço propostas na direção do eixo Y: A_{spyN} é determinada pela armadura fornecida pelo momento negativo para os dois casos, e A_{spyP} é determinada pela armadura mínima A_{sminy} para os dois casos, para $L = 6,00$ e $7,00$ m.

As áreas de aço propostas na direção do eixo X: A_{spxw1} y A_{spxw2} são determinadas pelas armaduras mínimas respectivamente, para os casos I e IV, para $L = 6,00$ e $7,00$ m.

Para as sapatas com ambas as extremidades restringidas e restringidas em L_{yI} :

A espessura é determinada pelo momento em M_{ug} para o caso I e pelo esforço cortante por flexão em V_u para o caso II, para $L = 6,00$ m; e pelo esforço cortante por flexão em V_{um} para o caso I e em V_{uj} para o caso II, para $L = 7,00$ m.

As áreas de aço propostas na direção do eixo Y: A_{spyN} y A_{spyP} são determinadas pela armadura mínima A_{sminy} para o caso I, para $L = 6,00$ e $7,00$ m. A_{spyN} y A_{spyP} são determinadas pela armadura fornecida pelo momento negativo para o caso II, para $L = 6,00$ e $7,00$ m.

As áreas de aço propostas na direção do eixo X: A_{spxw1} é determinada pela armadura mínima $A_{sminxw1}$ sob o pilar 1 para os casos I e II, com exceção do caso I para $L = 6,00$ m. A área de aço proposta na direção do eixo X, A_{spxw2} , é determinada pela armadura fornecida pelo momento negativo sob o pilar 2 para os casos I e II, com exceção do caso II para $L = 7,00$ m.

A Tabela 2 apresenta o seguinte (ver Anexo):

Para as sapatas submetidas à flexão uniaxial (Caso Y) (ver Anexo):

A espessura é determinada pelo esforço cortante por flexão em V_{uj} para os casos Y-I e Y-II, para $L = 6,00$ e $7,00$ m.

As áreas de aço propostas na direção do eixo Y: A_{spyN} é determinada pela armadura fornecida pelo momento negativo, e A_{spyP} é determinada pela armadura mínima A_{sminy} , para os casos Y-I e Y-II, para $L = 6,00$ e $7,00$ m.

As áreas de aço propostas na direção do eixo X: A_{spxw1} é determinada pela armadura mínima $A_{sminxw1}$ para os casos Y-I e Y-II, para $L = 6,00$ e $7,00$ m, e para A_{spxw2} ocorre o mesmo que para A_{spxw1} .

Para as sapatas submetidas à flexão uniaxial (Caso X) (ver Anexo):

A espessura é determinada pelo esforço cortante por flexão em V_{um} para o caso X-I, para $L = 6,00$ e $7,00$ m, e, para o caso X-II, é determinada pelo esforço cortante por flexão em V_{ul} e V_{um} .

As áreas de aço propostas na direção do eixo Y: A_{smyN} e A_{smyP} são determinadas pela armadura mínima A_{sminy} para os casos X-I e X-II, para $L = 6,00$ e $7,00$ m.

As áreas de aço propostas na direção do eixo X: A_{spxw1} é determinada pela armadura fornecida pelo momento sob o pilar 1 para os casos X-I e X-II, para $L = 6,00$ e $7,00$ m, e para A_{spxw2} ocorre o mesmo que para A_{spxw1} .

A Figura 10 representa detalhadamente o dimensionamento geral (dimensões e armadura de reforço) das ZCRs.

A Figura 11 apresenta os volumes de concreto e de aço para flexão biaxial, considerando os quatro tipos de restrições.

A Figura 11(a) apresenta os volumes de concreto para flexão biaxial. Os maiores volumes correspondem ao modelo atual para todos os tipos de restrições, sendo que a maior diferença ocorre para $L = 6,00$ m, em que o volume do modelo atual é 29,72 vezes o volume do modelo proposto, para os lados restringidos em L_{y1} e L_{y2} e para o lado restringido em L_{yI} .

A Figura 11(b) apresenta os volumes de aço para flexão biaxial. Os maiores volumes correspondem ao modelo atual para todos os tipos de restrições, sendo que a maior diferença ocorre para $L = 6,00$ m, em que o volume de aço do modelo atual é 28,74 vezes o volume correspondente do modelo proposto, para os lados restringidos em L_{y1} e L_{y2} e para o lado restringido em L_{yI} .

Os volumes de concreto e de aço são determinados da seguinte forma: $V_c = L_x L_y t - (A_{spyN} + A_{spyP}) L_y - (A_{spxw1} + A_{spxw2} + A_{sti} + A_{sts}) L_x$ y $V_s = (A_{spyN} + A_{spyP}) L_y + (A_{spxw1} + A_{spxw2} + A_{sti} + A_{sts}) L_x$. Aqui, o comprimento do gancho não é considerado, pois o comprimento total das barras da sapata é equivalente ao comprimento total com gancho, uma vez que seria necessário descontar o cobrimento e o comprimento de desenvolvimento do gancho.

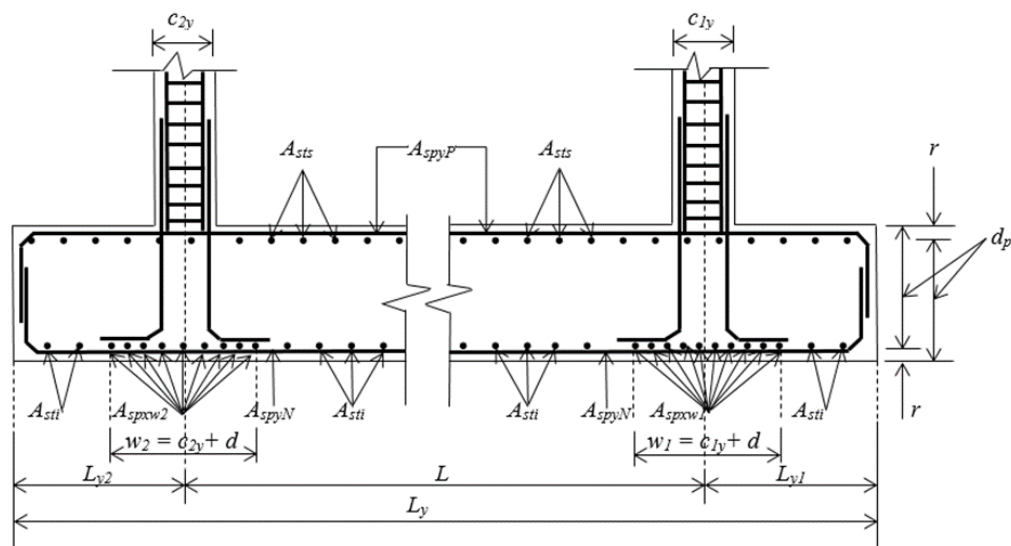
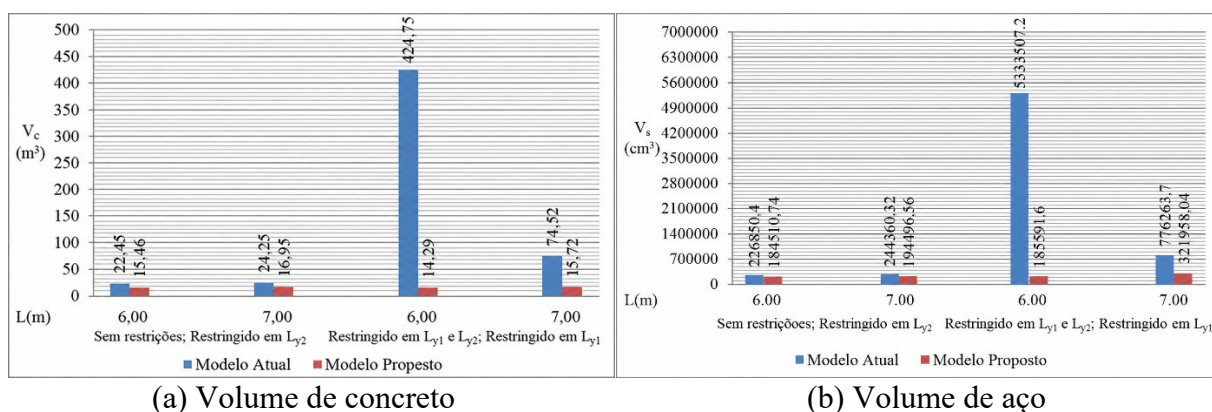


Figura 10. Dimensionamento geral das ZCRs.

Fonte: Elaboração própria.



(a) Volume de concreto

(b) Volume de aço

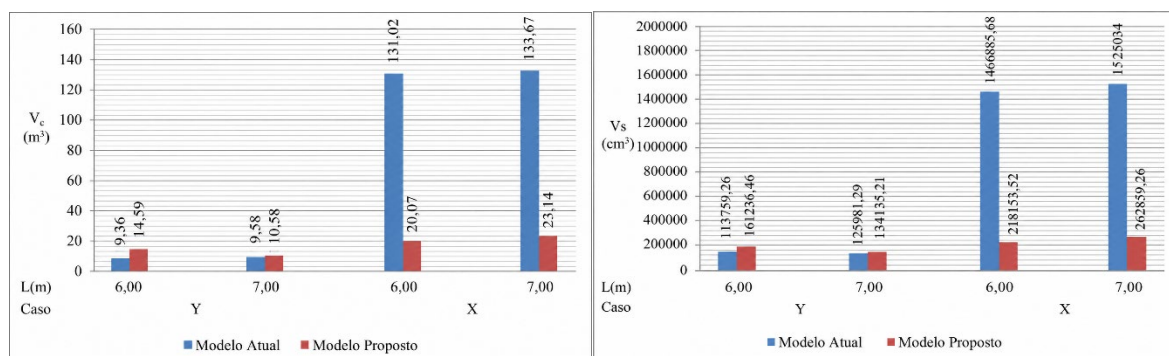
Figura 11. Volumes de concreto e aço para flexão biaxial.

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 12 apresenta os volumes de concreto e de aço para flexão uniaxial, considerando os dois casos, X e Y.

A Figura 12(a) apresenta os volumes de concreto para flexão uniaxial. O volume para o caso Y é ligeiramente maior no modelo atual, para $L = 7,00$ m, em relação ao modelo proposto; para $L = 6,00$ m, o modelo proposto apresenta maior volume, sendo 1,56 vez o volume do modelo atual. Para o caso X, o maior volume corresponde ao modelo atual, sendo que a maior diferença ocorre para $L = 6,00$ m, com valor 6,53 vezes superior ao do modelo proposto, enquanto a menor diferença ocorre para $L = 7,00$ m, com valor 5,79 vezes superior ao do modelo proposto.

A Figura 12(b) apresenta os volumes de aço para flexão uniaxial. O volume para o caso Y é ligeiramente maior no modelo atual, para $L = 7,00$ m, em relação ao modelo proposto; para $L = 6,00$ m, o modelo proposto apresenta maior volume, sendo 1,06 vez o volume do modelo atual. Para o caso X, o maior volume corresponde ao modelo atual, sendo que a maior diferença ocorre para $L = 6,00$ m, com valor 6,88 vezes superior ao do modelo proposto, enquanto a menor diferença ocorre para $L = 7,00$ m, com valor 5,81 vezes superior ao do modelo proposto.



(a) Volume de concreto

(b) Volume de aço

Figura 12. Volumes de concreto e aço para flexão uniaxial.

Fonte: Elaboração própria.

Além disso, é realizada uma comparação entre o MP (modelo proposto) e o EP (exemplo prático) proposto por Luévanos-Rojas (2016a) (lados restringidos na direção Y ou direção longitudinal), cujos dados do exemplo sob flexão biaxial são:

As dimensões dos pilares são de 40×40 cm, $L_{y1} = 0.20$ m, $L_{y2} = 0.20$ m, $L = 5,60$ m, $L_y = 6,00$ m e $\sigma_{max} = 220$ kN/m², e a sapata está submetida a $P_l = 1000$ kN ($P_{Dl} = 600$ kN e $P_{Ll} = 400$ kN), $M_{x1} = 240$ kN·m ($M_{xD1} = 140$ kN·m e $M_{xL1} = 100$ kN·m), $M_{y1} = 200$ kN·m ($M_{yD1} = 120$ kN·m e $M_{yL1} = 80$ kN·m), $P_2 = 800$ kN ($P_{D2} = 500$ kN e $P_{L2} = 300$ kN), $M_{x2} = 220$ kN·m ($M_{xD2} = 120$ kN·m e $M_{xL2} = 100$ kN·m), $M_{y2} = 200$ kN·m ($M_{yD2} = 110$ kN·m e $M_{yL2} = 90$ kN·m).

As cargas últimas e os momentos últimos serão: $P_{u1} = 1360$ kN, $M_{ux1} = 328$ kN·m, $M_{uy1} = 272$ kN·m, $P_{u2} = 1080$ kN, $M_{ux2} = 304$ kN·m, $M_{uy2} = 272$ kN·m, $R_u = 2440$ kN; $M_{uyT} = 548$ kN·m, $M_{uxT} = 1416$ kN·m, $\sigma_{umax} x = 299,42$ kN/m².

A pressão máxima última é obtida a partir das dimensões conhecidas e utilizando-se as cargas últimas e os momentos últimos por meio da equação (7) de Montes-Páramo et al. (2023).

A Tabela 3 apresenta detalhadamente a comparação das dimensões finais entre o MP (caso II) e o EP (caso I).

Tabela 3. Comparação das dimensões finais entre o MP e o EP.

(Fonte: Elaboração própria)

Modelo	d_p (m)	t (cm)	L (m)	L_x (m)	L_y (m)	L_{y1} (m)	L_{y2} (m)	L_{x3} (m)	L_{y3} (m)	A_{min} (m ²)
MP	52	60	5.60	2.80	6.00	0.20	0.20	5.91	10.87	16.80
EP	77	85	5.60	3.30	6.00	0.20	0.20	-	-	19.80

onde: t é a espessura total, e A_{min} é a área mínima em planta da sapata.

Na Tabela 3, observa-se que o MP é menor que o EP para L_x e A_{min} .

A Tabela 4 apresenta detalhadamente a comparação dos momentos últimos de dimensionamento em cada seção entre o MP e o EP.

Tabela 4. Comparação dos momentos últimos de dimensionamento entre o MP e o EP.

(Fonte: Elaboração própria)

Modelo	M_{ua} (kN-m)	M_{ub} (kN-m)	M_{uc} (kN-m)	M_{ud} (kN-m)	M_{ue} (kN-m)	$\phi_f M_{ux}$ (kN-m)	M_{uf} (kN-m)	$\phi_f M_{uf}$ (kN-m)	M_{ug} (kN-m)	$\phi_f M_{ug}$ (kN-m)
MP	0	549.65	1223.14	-100.74	0	3703.84	-139.67	873.05	-66.36	873.05
EP	0	549.43	1652.53	-102.49	0	9571.55	-544.64	2276.87	-457.08	2276.87

onde: M_{ua} é o momento que atua sobre o eixo a ; M_{ub} é o momento que atua sobre o eixo b ; M_{uc} é o momento máximo positivo; M_{ud} é o momento que atua sobre o eixo d ; M_{ue} é o momento que atua sobre o eixo e ; ϕ_f (fator de redução da resistência à flexão) = 0,90; $\phi_f M_{ux}$ é o momento resistente

Dimensionamento completo de sapatas combinadas retangulares, considerando que a área de contato com o solo está parcialmente comprimida.

Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Martínez Aguilar, C.

na direção paralela ao eixo X; M_{uf} é o momento que atua sobre o eixo f ; $\phi_f M_{uf}$ é o momento resistente sobre o eixo f ; M_{ug} é o momento que atua sobre o eixo g ; e $\phi_f M_{ug}$ é o momento resistente sobre o eixo g .

Tabela 4 mostra que o MP é menor que o EP para todos os momentos últimos, exceto para M_{ub} . A Tabela 5 apresenta detalhadamente a comparação dos esforços cortantes últimos por flexão para dimensionamento em cada seção entre o MP e o EP.

Tabela 5. Comparação dos esforços cortantes últimos por flexão para dimensionamento entre o MP e o EP.

(Fonte: Elaboração própria)

Modelo	V_{uh} (kN)	V_{ui} (kN)	V_{uj} (kN)	V_{uk} (kN)	$\phi_v V_{ux}$ (kN)	V_{ul} (kN)	$\phi_v V_{uy}$ (kN)	V_{um} (kN)	$\phi_v V_{uy}$ (kN)
MP	0	613.28	-893.73	0	964.14	-131.91	227.26	-62.67	227.26
EP	0	661.92	-826.48	0	1682.60	-361.15	400.26	-304.64	400.26

onde: V_{uh} é o esforço cortante por flexão sobre o eixo h ; V_{ui} é o esforço cortante por flexão sobre o eixo i ; V_{uj} é o esforço cortante por flexão sobre o eixo j ; V_{uk} é o esforço cortante por flexão sobre o eixo k ; ϕ_v (fator de redução da resistência ao cisalhamento) = 0,85; $\phi_v V_{ux}$ é o esforço cortante por flexão resistente do concreto na direção paralela ao eixo X; V_{ul} é o esforço cortante por flexão sobre o eixo l ; $\phi_v V_{ul}$ é o esforço cortante por flexão resistente do concreto sobre o eixo l ; V_{um} é o esforço cortante por flexão sobre o eixo m ; e $\phi_v V_{um}$ é o esforço cortante por flexão resistente do concreto sobre o eixo m .

A Tabela 5 indica que o MP é menor que o EP para todos os esforços cortantes últimos por flexão, exceto para V_{uj} , em valor absoluto.

A Tabela 6 apresenta detalhadamente a comparação dos esforços cortantes últimos por punção para dimensionamento em cada seção entre o MP e o EP.

Tabela 6. Comparação dos esforços cortantes últimos por punção para dimensionamento entre o MP e o EP.(Fonte: Elaboração própria)

Modelo	V_{up1} (kN)	$\phi_v V_{upR11}$ (kN)	$\phi_v V_{upR12}$ (kN)	$\phi_v V_{upR13}$ (kN)	V_{up2} (kN)	$\phi_v V_{upR21}$ (kN)	$\phi_v V_{upR22}$ (kN)	$\phi_v V_{upR23}$ (kN)
MP	1226.80	7214.02	3375.78	1497.25	1036.12	7214.02	3375.78	1497.25
EP	1189.73	13066.73	7114.75	2711.96	1023.66	13066.73	7114.75	2711.96

onde: V_{up1} é o esforço cortante por punção que atua no pilar 1; $\phi_v V_{upR12}$, $\phi_v V_{upR22}$ e $\phi_v V_{upR13}$ são os esforços cortantes resistentes à punção do concreto no pilar 1; $\phi_v V_{up2}$ é o esforço cortante por punção que atua no pilar 2; $\phi_v V_{upR21}$, $\phi_v V_{upR22}$ e $\phi_v V_{upR23}$ são os esforços cortantes resistentes à punção do concreto no pilar 2.

A Tabela 6 mostra que o MP é maior que o EP para todos os esforços cortantes últimos por punção que atuam sobre a sapata; entretanto, para os esforços cortantes últimos resistentes à punção do concreto, o MP é menor que o EP.

A Tabela 7 apresenta detalhadamente a comparação das áreas de aço entre o MP e o EP.

Tabela 7. Comparação das áreas de aço entre o MP e o EP.

(Fonte: Elaboração própria)

Modelo	A_{smyN} (cm ²)	A_{smyP} (cm ²)	A_{sminy} (cm ²)	A_{smyN} (cm ²)	A_{smyP} (cm ²)	A_{smxcw1} (cm ²)	A_{smxcw1} (cm ²)	A_{spxw1} (cm ²)	A_{smxcw2} (cm ²)	A_{smxcw2} (cm ²)	A_{spxw2} (cm ²)	A_{sti} (cm ²)	A_{sts} (cm ²)
MP	5.15	65.72	48.48	48.48	65.72	7.29	11.43	11.43	3.42	11.43	11.43	50.54	64.80
EP	3.53	58.35	84.62	84.62	84.62	19.45	20.13	20.13	16.22	20.13	20.13	67.78	91.80

Dimensionamento completo de sapatas combinadas retangulares, considerando que a área de contato com o solo está parcialmente comprimida.

onde: A_{smyN} e A_{smyP} são as áreas de aço fornecidas pelos momentos negativos (parte inferior) e positivos (parte superior), na direção Y; A_{sminy} é a área mínima de aço na direção Y; A_{smyN} e A_{smyP} são as áreas de aço propostas para os momentos negativos (parte inferior) e positivos (parte superior), na direção Y; A_{smxw1} e A_{smxw2} são as áreas de aço sob os pilares, determinadas pelos momentos M_{uf} e M_{ug} , na direção X; $A_{sminxw1}$ e $A_{sminxw2}$ são as áreas mínimas de aço sob os pilares 1 e 2, na direção X; A_{spxw1} e A_{spxw2} são as áreas de aço propostas sob cada pilar, na direção X; A_{sti} é a área de aço para efeitos de temperatura na parte inferior da sapata, na direção X, com largura $L_y - w_1 - w_2$; e A_{sts} é a área de aço para efeitos de temperatura na parte superior da sapata, na direção X, com largura L_y .

A Tabela 7 indica que o MP é menor que o EP para todas as áreas de aço.

Portanto, os volumes de concreto e de aço para o MP são $V_c = 9,97 \text{ m}^3$ e $V_s = 107.216,00 \text{ cm}^3$, e para o EP são $V_c = 16,66 \text{ m}^3$ e $V_s = 167.491,20 \text{ cm}^3$. Assim, a economia de concreto é de 40,16% do MP em relação ao EP, enquanto a economia de aço é de 35,99% do MP em relação ao EP.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresenta-se o dimensionamento completo para determinar a espessura e as áreas das armaduras longitudinais e transversais das ZCRs rígidas submetidas à flexão biaxial e uniaxial, apoiadas sobre solos elásticos (a distribuição da pressão do solo é linear).

O trabalho apresentado por Montes-Páramo et al. (2023) apresenta a área mínima para ZCRs submetidas à flexão uniaxial e biaxial.

As principais conclusões apresentadas neste trabalho são:

1. Alguns autores apresentam o dimensionamento completo de ZCRs submetidas à flexão biaxial e uniaxial sobre solos elásticos, porém consideram apenas o caso I (área totalmente comprimida).
2. Este trabalho apresenta uma economia significativa nos volumes de concreto e aço em relação ao modelo atual para flexão biaxial, com uma economia de concreto de até 96,64% e de aço de até 96,52%, com ambas as extremidades restringidas, para $L = 6,00 \text{ m}$ (ver Figura 11).
3. O modelo proposto apresenta uma economia nos volumes de concreto e aço em relação ao modelo atual para flexão uniaxial (caso X), com uma economia de concreto de até 84,68% e de aço de até 85,47%, quando a carga está posicionada sobre o eixo X, para $L = 6,00 \text{ m}$ (ver Figura 12).
4. O modelo novo apresenta uma economia nos volumes de concreto e aço em relação ao modelo velho para flexão uniaxial (caso Y), com uma economia de concreto de até 35,86% e de aço de até 5,91%, quando a carga está posicionada sobre o eixo Y, para $L = 6,00 \text{ m}$ (ver Figura 12).
5. As espessuras para flexão biaxial, para as sapatas com ambas as extremidades livres e restringidas em L_{y2} , são determinadas por V_{um} (Caso I) e por V_{uj} (Caso IV), para $L = 6,00$ e $7,00 \text{ m}$. Para as sapatas com ambas as extremidades restringidas e restringidas em L_{y1} , as espessuras são determinadas por M_{ug} (Caso I) e por V_{uj} (Caso II), para $L = 6,00 \text{ m}$, e por V_{um} (Caso I) e V_{uj} (Caso II), para $L = 7,00 \text{ m}$ (ver Tabela 1).
6. As espessuras para flexão uniaxial, para as sapatas (Caso Y), são determinadas por V_{uj} (Casos Y-I e Y-II), para $L = 6,00$ e $7,00 \text{ m}$. As espessuras para flexão uniaxial das sapatas (Caso X) são determinadas por V_{um} (Caso X-I), para $L = 6,00$ e $7,00 \text{ m}$, e por V_{ul} e V_{um} (Caso X-II), para $L = 6,00$ e $7,00 \text{ m}$ (ver Tabela 2).
7. A comparação entre o MP e o EP, proposto por Luévanos-Rojas (2016a), resulta em uma economia de concreto de 40,16% no MP em relação ao EP e em uma economia de aço de 35,99% no MP em relação ao EP.

8. O EP proposto por Luévanos-Rojas (2016a) foi verificado por meio do Caso I deste artigo, e os resultados coincidem.
9. O modelo proposto neste trabalho pode ser utilizado com outros códigos ou regulamentos de construção, considerando-se simplesmente os momentos resistentes, os esforços cortantes resistentes por flexão e os esforços cortantes resistentes à punção para definir a altura útil, bem como as equações para determinar as áreas de armadura propostas por cada código ou regulamento de construção.
10. O modelo proposto pode ser utilizado quando a força resultante R estiver localizada fora do núcleo central e dentro da área da ZCR, enquanto o modelo atual pode ser utilizado quando a força resultante R estiver localizada dentro do núcleo central.

Este estudo apresenta uma solução robusta e eficaz, aplicada exclusivamente à obtenção do dimensionamento completo (espessura e áreas das armaduras transversal e longitudinal), com base no trabalho apresentado por Montes-Páramo et al. (2023), no qual são determinados os lados e a área mínima das ZCRs apoiadas sobre solos elásticos.

Sugestões para pesquisas futuras:

1. Dimensionamento completo de sapatas combinadas trapezoidais, em forma de T e em forma de L (de canto), trabalhando parcialmente sob compressão.
2. Desenvolvimento de software para o dimensionamento completo das ZCRs, considerando a área de contato com o solo que trabalha parcialmente sob compressão.

6. REFERÊNCIAS

- ACI 318S-19 (2019). “*Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, Committee 318”, New York, USA.
- Al-Gahtani, H. J., Adekunle, S. K. (2019), *A boundary-type approach for the computation of vertical stresses in soil due to arbitrarily shaped foundations*. World Journal of Engineering, 16(3), 419-426. <https://doi.org/10.1108/WJE-02-2018-0051>
- Algin, H. M. (2000), *Stresses from linearly distributed pressures over rectangular areas*. International Journal Numerical Analytical Methods in Geomechanics, 24(8), 681-692. [https://doi.org/10.1002/1096-9853\(200007\)24:8<681::AID-NAG89>3.0.CO;2-X](https://doi.org/10.1002/1096-9853(200007)24:8<681::AID-NAG89>3.0.CO;2-X)
- Algin, H. M. (2001), *Vertical stress formula for pressure over rectangular areas*. Géotechnique, 51(8), 719-722. <https://doi.org/10.1680/geot.2001.51.8.719>
- Algin, H. M. (2007), *Practical formula for dimensioning a rectangular footing*. Engineering Structures, 29(6), 1128-1134. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.08.009>
- Aydogdu, I. (2016), *New Iterative method to Calculate Base Stress of Footings under Biaxial Bending*. International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS), 8(4), 40-48. <https://doi.org/10.24107/ijeas.281460>
- Bezmalinovic Colleoni, A. S. (2016), *Fórmulas Analíticas para la Presión de Contacto Lineal en Fundaciones Rectangulares Altamente Excéntricas*. IX Chilean Congress on Geotechnical Engineering, Chilean Geotechnical Society, Universidad Austral de Chile.
- Dagdeviren, U. (2016), *Shear stresses below the rectangular foundations subjected to biaxial bending*. Geomechanics Engineering, 10(2), 189-205. <https://doi.org/10.12989/gae.2016.10.2.189>
- Galvis, F. A., Smith-Pardo, P. J. (2020), *Axial load biaxial moment interaction (PMM) diagrams for shallow foundations: Design aids, experimental verification, and examples*. Engineering Structures, 213, 110582. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110582>
- Girgin, K. (2017), *Simplified formulations for the determination of rotational spring constants in rigid spread footings resting on tensionless soil*. Journal of Civil Engineering and Management, 23(4), 464-474. <https://doi.org/10.3846/13923730.2016.1210218>

- Gör, M. (2022), *Analyzing the bearing capacity of shallow foundations on two-layered soil using two novel cosmology-based optimization techniques*. Smart Structures and Systems, 29(3), 513-522. <https://doi.org/10.12989/sss.2022.29.3.513>
- Hightler, W. H., Anders, J. C. (1985), *Dimensioning Footings Subjected to Eccentric Loads*. Journal of Geotechnical Engineering ASCE, 111(5), 659-665. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1985\)111:5\(659\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1985)111:5(659))
- Irles-Más, R., Irles-Más, F. (1992), *Alternativa analítica a la determinación de tensiones bajo zapatas rectangulares con flexión biaxial y despegue parcial*. Informes de la Construcción, 44(419), 77-89. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2768804>
- Kaur, A., Kumar, A. (2016), *Behavior of eccentrically inclined loaded footing resting on fiber reinforced soil*. Geomechanics Engineering, 10(2), 155-174. <https://doi.org/10.12989/gae.2016.10.2.155>
- Kim-Sánchez, D. S., Luévanos-Rojas, A., Barquero-Cabrero, J. D., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Luévanos-Soto, I. (2022), *A new model for the complete design of circular isolated footings considering that the contact surface works partially under compression*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 18(6), 1769-1784. <http://www.ijicic.org/ijicic-180607.pdf>
- Konapure, C. G., Vivek, B. (2013), *Analysis of Combined rectangular footing by Winkler's Model and Finite Element Method*. International Journal of Engineering and Innovative Technology, 3(5), 128-132. https://www.ijeit.com/Vol%203/Issue%205/IJEIT1412201311_21.pdf
- Lee, J., Jeong, S., Lee, J. K. (2015), *3D analytical method for mat foundations considering coupled soil springs*. Geomechanics Engineering, 8(6), 845-850. <https://doi.org/10.12989/gae.2015.8.6.845>
- Lezgy-Nazargah, M., Mamazizi, A., Khosravi, H. (2022), *Analysis of shallow footings rested on tensionless foundations using a mixed finite element model*. Structural Engineering and Mechanics, 81(3), 379-394. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.3.379>
- Luévanos-Rojas, A. (2014), *Design of boundary combined footings of rectangular shape using a new model*. DYNA, 81(188), 199-208. <https://doi.org/10.15446/dyna.v81n188.41800>
- Luévanos-Rojas, A. (2016a), *Un nuevo modelo para diseño de zapatas combinadas rectangulares de lindero con dos lados opuestos restringidos*. Revista ACONPAT, 6(2), 173-189. <http://dx.doi.org/10.21041/ra.v6i2.137>
- Luévanos-Rojas, A. (2016b), *A Mathematical Model for the Dimensioning of Combined Footings of Rectangular Shape*. Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia, 39(1), 3-9. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0254-07702016000100002&lng=en&nrm=iso&tlng=es
- Luévanos-Rojas, A. (2023), *Nuevo modelo para el diseño completo de zapatas aisladas rectangulares tomando en cuenta que la superficie de contacto funciona parcialmente en compresión*. Revista ALCONPAT, 13(2), 192-219. <https://doi.org/10.21041/ra.v13i2.671>
- Luévanos-Rojas, A., Barquero-Cabrero, J. D., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2017), *A comparative study for design of boundary combined footings of trapezoidal and rectangular forms using new models*. Coupled Systems Mechanics, 6(4), 417-437. <https://doi.org/10.12989/csm.2017.6.4.417>
- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Sandoval-Rivas, R., Farías-Montemayor, O. M. (2020), *Un modelo analítico para el diseño de zapatas combinadas de esquina*. Revista ALCONPAT, 10 (3), 317-335. <https://doi.org/10.21041/ra.v10i3.432>
- Luévanos-Rojas, A. (2025a), *Optimal surface for corner combined footings assuming that the ground contact area works partially in compression considering that the maximum pressure is located at the corner of the footing: Part 1*. Advances in Concrete Construction, 19(6), 349-362. <https://doi.org/10.12989/acc.2025.19.6.349>
- Luévanos-Rojas, A. (2025b), *Optimal surface for corner combined footings assuming that the ground contact area works partially in compression considering that the maximum pressure is*

- located at one end and on the outer and inner side of the footing: Part 2. *Advances in Concrete Construction*, 19(6), 363-380. <https://doi.org/10.12989/acc.2025.19.6.363>
- Luévanos-Rojas, A., Estrada-Mendoza, B. L., Juárez-Ramírez, M., (2025), *Área óptima para zapatas combinadas en forma de T asumiendo que el área en contacto con el suelo trabaja parcialmente en compresión*. *Boletín de Ciencias de la Tierra*, 58(2), 51-71. <https://doi.org/10.15446/rbct.n58.120221>
- Luévanos-Soto, I., Luévanos-Rojas, A., Moreno-Landeros, V. M., Santiago-Hurtado, G., (2024a), *Minimum area for circular isolated footings with eccentric column taking into account that the surface in contact with the ground works partially in compression*. *Coupled Systems Mechanics*, 13(3), 201-217. <https://doi.org/10.12989/csm.2024.13.3.201>
- Luévanos-Soto, I., Luévanos-Rojas, A., Moreno-Landeros, V. M., Santiago-Hurtado, G., (2024b), *Minimum cost design for circular isolated footings with eccentric column taking into account that the surface in contact with the ground works partially in compression*. *Coupled Systems Mechanics*, 13(4), 311-335. <https://doi.org/10.12989/csm.2024.13.4.311>
- Montes-Paramo, P., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Sandoval-Rivas, R. (2023), *Área óptima para zapatas combinadas rectangulares asumiendo que la superficie de contacto con el suelo trabaja parcialmente a compresión*. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, 24(02), 1-15. <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2023.24.2.012>
- Özmen, G. (2011), *Determination of Base Stresses in Rectangular Footings under Biaxial Bending*. *Teknik Dergi Digest*, 22(4), 1519-1535. http://www.imo.org.tr/resimler/dosya_ekler/7b559795bd3f63b_ek.pdf?dergi=472
- Peck, R. B., Hanson, W. E., Thornburn, T. H. (1974), *Foundation Engineering*, 2nd ed. New York: John Wiley and Sons.
- Ravi Kumar Reddy, C., Satish Kumar, M., Kondala Rao, M., Gopika, N. (2018), *Numerical Analysis of Rectangular Combined Footings Resting on Soil for Contact Pressure*. *International Journal of Civil Engineering and Technology*, 9(9), 1425-1431. <http://iaeme.com/Home/issue/IJCIET?Volume=9&Issue=9>
- Rawat, S., Mittal, R. K., Muthukumar, G. (2020), *Isolated Rectangular Footings under Biaxial Bending: A Critical Appraisal and Simplified Analysis Methodology*. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 25(3). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SC.1943-5576.0000471](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000471)
- Rodriguez-Gutierrez, J. A., Aristizabal-Ochoa, J. D. (2004), *Presiones en zapatas rígidas de forma arbitraria sometidas a carga axial excéntrica*. *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 4(1), 67-82. https://www.scipedia.com/wd/images/2/27/Draft_Content_636675925Rodriguez-Gutierrez_Aristizabal-Ochoa_a.pdf
- Rodriguez-Gutierrez, J. A., Aristizabal-Ochoa, J. D. (2013a), *Rigid Spread Footings Resting on Soil Subjected to Axial Load and Biaxial Bending. I: Simplified Analytical Method*. *Internacional Journal of Geomechanics-ASCE*, 13(2), 109-119. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000218](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000218)
- Rodriguez-Gutierrez, J. A., Aristizabal-Ochoa, J. D. (2013b), *Rigid Spread Footings Resting on Soil Subjected to Axial Load and Biaxial Bending. II: Design Aids*. *Internacional Journal of Geomechanics-ASCE*, 13(2), 120-131. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000210](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000210)
- Soto-Garcia, S., Luévanos-Rojas, A., Barquero-Cabrero, J. D., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Farias-Montemayor, O. M., Martínez-Aguilar, C. (2022), *A New Model for the Contact Surface With Soil of Circular Isolated Footings Considering that the Contact Surface Works Partially Under Compression*. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 18(4), 1103-1116. <http://www.ijicic.org/ijicic-180406.pdf>
- Teng, W. C. (1979), *Foundation Design*, New Jersey: Prentice-Hall Inc.

- Vela-Moreno, V. B., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Sandoval-Rivas, R., Martínez-Aguilar, C. (2022), *Optimal area for rectangular isolated footings considering that contact surface works partially to compression*. *Structural Engineering and Mechanics*, 84(4), 561-573. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.84.4.561>
- Velazquez-Santillan, F., Luévanos-Rojas, A., Lopez-Chavarria, S., Medina-Elizondo, M., Sandoval-Rivas, R. (2018), *Numerical experimentation for the optimal design for reinforced concrete rectangular combined footings*. *Advances in Computational Design*, 3(1), 49-69. <https://doi.org/10.12989/acd.2018.3.1.049>
- Vitone, D. M. A., Valsangkar, A. J. (1986), *Stresses from Loads over Rectangular Areas*. *Journal of Geotechnical Engineering ASCE*, 112(10), 961-964. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1986\)112:10\(961\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1986)112:10(961))
- Vivek, B., Arkal, L. S., Bandgar, R. V., Kalekhan, F. A. S. (2014), *Comparative Study on Conventional and Simplified Elastic Analysis of Rectangular Combined Footing*. *International Journal of Research in Engineering and Technology*, 3(4), 422-427. <https://ijret.org/volumes/2014v03/i04/IJRET20140304076.pdf>
- Young, W. C., Budynas, R. G. (2002), *Roark's Formulas for Stress and Strain*. 7th ed. New Jersey: McGraw-Hill.

ANEXO

Tabla 1. Ejemplos de flexión biaxial.
(Fuente: Elaboración propia)

Concepto	Extremos libres; Restringido en L_{y2}				Extremos restringidos; Restringido en L_{y1}			
Caso	I	IV	I	IV	I	II	I	II
L (m)	6.00		7.00		6.00		7.00	
R_u (kN)	2040	2040	2040	2040	2040	2040	2040	2040
M_{uxT} (kN-m)	0	0	0	0	2040	2040	1700	1700
M_{uyT} (kN-m)	1020	1020	1020	1020	1020	1020	1020	1020
L_x (m)	3.00	2.19	3.00	2.10	48.00	3.48	9.25	2.89
L_y (m)	8.40	8.40	9.07	9.07	6.40	6.40	7.40	7.40
L_{y1} (m)	2.20	2.20	1.87	1.87	0.20	0.20	0.20	0.20
L_{y2} (m)	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
L_{x3} (m)	-	1.79	-	1.65	-	5.32	-	3.64
L_{y3} (m)	-	444529.09	-	434025.46	-	9.06	-	13.94
d_p (cm)	82	77	82	82	132	57	102	67
r (cm)	8	8	8	8	8	8	8	8
t (cm)	90	85	90	90	140	65	110	75
V_c (m ³)	22.45	15.46	24.25	16.95	424.75	14.29	74.52	15.72
M_{ua} (kN-m)	-485.71	-486.88	-312.50	-312.91	0	0	0	0
M_{ub} (kN-m)	796.57	794.90	1015.50	1015.24	1447.59	1446.16	1459.58	1458.68
y_c (m)	1.40	1.40	1.51	1.50	1.99	1.98	2.09	2.11
M_{uc} (kN-m)	816.00	816.01	1118.22	1118.71	1622.28	1601.34	1755.12	1743.22
M_{ud} (kN-m)	-2467.43	-2485.99	-2466.00	-2449.84	-2450.59	-2449.90	-2455.69	-2467.56
M_{ue} (kN-m)	0	0	0	0	0	0	0	0
ϕM_{ux} (kN-m)	7608.05	3480.81	9868.15	6907.71	409143.86	5531.16	47079.19	6346.50
M_{uf} (kN-m)	-327.73	-127.46	-327.73	-119.88	-4180.16	-216.06	-878.70	-152.72
ϕM_{uf} (kN-m)	4013.05	3393.55	4013.05	4013.05	9035.26	1088.75	4631.57	1614.08
M_{ug} (kN-m)	-655.47	-85.52	-655.47	-79.59	-8360.32	-362.38	-1757.40	-230.52
ϕM_{ug} (kN-m)	2664.40	2276.87	2664.40	2664.40	9035.26	1088.75	4631.57	1614.08
V_{uh} (kN)	-485.71	-486.88	-190.50	-374.75	*	*	*	*
V_{ui} (kN)	-102.00	-91.70	30.50	31.49	-244.10	50.64	74.80	189.92
V_{uj} (kN)	-1063.71	-1080.04	-1085.50	-1081.51	-1187.60	-1274.09	-1182.28	-1225.93
V_{uk} (kN)	*	*	*	*	*	*	*	*
ϕV_{ux} (kN)	1628.97	1116.64	1628.97	1140.28	41955.86	1313.50	6247.69	1282.18
V_{ui} (kN)	-200.19	-39.78	-219.04	-9.96	-329.05	-176.74	-301.61	-113.30
ϕV_{ui} (kN)	662.45	258.55	662.45	662.45	926.53	258.55	614.64	326.09
V_{um} (kN)	-400.38	-26.69	-400.38	-6.61	-658.10	-57.05	-603.22	-55.58
ϕV_{um} (kN)	439.82	400.26	439.82	439.82	926.53	258.55	614.64	326.09
V_{up1} (kN)	599.59	535.43	605.50	532.79	658.42	565.21	618.67	556.64
ϕV_{up1} (kN)	5143.71	4632.11	5143.71	5143.71	6515.50	1714.48	4248.03	2187.51
V_{up2} (kN)	1280.00	1263.01	1285.91	1262.26	1357.36	1359.22	1344.31	1338.92
ϕV_{up2} (kN)	2993.47	2711.96	2993.47	2993.47	6515.50	1714.48	4248.03	2187.51
A_{smyN} (cm ²)	82.89	91.22	82.84	83.84	49.16	122.62	64.21	104.00
A_{smyP} (cm ²)	26.67	28.61	36.72	37.03	32.53	77.92	45.78	71.98
A_{sminy} (cm ²)	81.92	56.15	81.92	57.34	2109.89	66.05	314.19	64.48
A_{spxN} (cm ²)	82.89	91.22	82.84	83.84	2109.89	122.62	314.19	104.00
A_{spxP} (cm ²)	81.92	56.15	81.92	57.34	2109.89	77.92	314.19	71.98
$A_{sminxw1}$ (cm ²)	10.71	4.40	10.71	3.89	90.69	10.35	23.49	6.12
$A_{sminxw1}$ (cm ²)	33.31	30.00	33.31	33.31	46.59	13.00	30.91	16.40
A_{spxw1} (cm ²)	33.31	30.00	33.31	33.31	90.69	13.00	30.91	16.40
$A_{sminxw2}$ (cm ²)	22.00	2.96	22.00	2.58	201.79	17.77	48.59	9.31
$A_{sminxw2}$ (cm ²)	22.12	20.13	22.12	22.12	46.59	13.00	30.91	16.40
A_{spxw2} (cm ²)	22.12	20.13	22.12	22.12	201.79	17.77	48.59	16.40
A_{sti} (cm ²)	103.19	98.61	114.05	114.05	94.75	58.85	110.48	80.06
A_{sts} (cm ²)	136.08	128.52	146.93	146.93	161.28	74.88	146.52	99.90
V_s (cm ³)	226850.40	184510.74	244360.32	194496.36	5333507.20	185591.60	776263.70	321938.04

* No existe porque el eje se ubica fuera del área de la zapata.

Tabla 2. Ejemplos de flexión uniaxial.

(Fuente: Elaboración propia)

Concepto	Cargas ubicadas sobre el eje Y				Cargas ubicadas sobre el eje X			
Caso	Y-I	Y-II	Y-I	Y-II	X-I	X-II	X-I	X-II
L (m)	6.00		7.00		6.00		7.00	
R_u (kN)	1360	1360	1360	1360	1360	1360	1360	1360
M_{uxT} (kN-m)	1954.43	2210.22	2278.00	2291.60	0	0	0	0
M_{uyT} (kN-m)	0	0	0	0	4080	4080	4080	4080
L_x (m)	1.00	1.03	1.00	1.00	18.00	7.04	18.00	6.90
L_y (m)	9.53	9.75	10.05	10.03	6.40	6.40	7.40	7.40
L_{y1} (m)	3.33	3.25	2.85	2.83	0.20	0.20	0.20	0.20
L_{y2} (m)	0.20	0.50	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
L_{x3} (m)	-	-	-	-	-	1.56	-	1.35
L_{y3} (m)	-	9.75	-	10.00	-	-	-	-
d_p (cm)	97	97	102	102	107	37	92	37
r (cm)	8	8	8	8	8	8	8	8
t (cm)	105	105	110	110	115	45	100	45
V_c (m ³)	9.87	15.39	10.91	10.88	131.02	20.07	131.67	22.74
M_{ua} (kN-m)	-1190.72	-1162.41	-866.78	-858.23	0	0	0	0
M_{ub} (kN-m)	3.52	31.45	364.50	373.51	119.00	119.00	121.30	121.30
γ_c (m)	1.84	2.02	2.08	2.09	0	0	0	0
M_{uc} (kN-m)	37.03	65.28	365.58	374.48	952.00	952.00	1122.00	1122.00
M_{ud} (kN-m)	-2585.37	-2585.64	-2584.29	-2579.70	119.00	119.00	121.30	121.30
M_{ue} (kN-m)	0	-0.13	0	0	0	0	0	0
ϕM_{ux} (kN-m)	4602.89	4740.97	5089.64	5089.64	100815.43	4714.80	74530.68	4621.04
M_{uf} (kN-m)	-30.60	-9.24	-30.60	-8.66	-2120.09	-347.52	-2120.09	-300.74
ϕM_{uf} (kN-m)	6305.96	6305.96	7227.29	7227.29	5236.80	391.78	3560.91	391.78
M_{ug} (kN-m)	-30.60	-8.00	-30.60	-5.55	-2777.43	-347.52	-2777.43	-300.74
ϕM_{ug} (kN-m)	4073.56	5454.42	4631.57	4631.57	5236.80	391.78	3560.91	391.78
V_{uh} (kN)	-523.93	-520.57	-405.38	-402.67	*	*	*	*
V_{ui} (kN)	-268.85	-277.62	-198.49	-198.53	367.63	516.38	437.41	538.49
V_{uj} (kN)	-635.95	-645.71	-652.85	-653.72	-367.63	-516.38	-437.41	-538.49
V_{uk} (kN)	*	*	*	*	*	*	*	*
$\phi_v V_{ux}$ (kN)	642.32	661.59	675.43	675.43	12753.63	1724.85	10965.74	1690.55
V_{ui} (kN)	*	*	*	*	-403.10	-124.11	-409.27	-107.41
$\phi_v V_{ui}$ (kN)	879.97	879.97	959.10	959.10	662.48	143.33	523.92	143.33
V_{um} (kN)	*	*	*	*	-625.25	-124.11	-520.85	-107.41
$\phi_v V_{um}$ (kN)	568.45	761.15	614.64	614.64	662.48	143.33	523.92	143.33
V_{up1} (kN)	431.22	424.12	404.17	394.76	663.77	680.00	668.41	680.00
$\phi_v V_{up1}$ (kN)	6832.74	6832.74	7447.17	7447.17	4593.81	922.67	3595.04	922.67
V_{up2} (kN)	657.36	659.83	669.52	669.48	663.77	680.00	668.41	680.00
$\phi_v V_{up2}$ (kN)	3915.11	3915.11	4248.03	4248.03	4593.81	922.67	3595.04	922.67
A_{smyN} (cm ²)	77.86	77.61	73.21	73.07	0	0	0	0
A_{smyP} (cm ²)	1.01	1.78	9.59	9.82	23.57	70.30	32.34	83.43
A_{sminy} (cm ²)	32.30	33.27	33.97	33.97	641.36	86.74	551.45	85.01
A_{spvN} (cm ²)	77.86	77.61	73.21	73.07	641.36	86.74	551.45	85.01
A_{spvP} (cm ²)	32.30	33.27	33.97	33.97	641.36	86.74	551.45	85.01
A_{smxw1} (cm ²)	0.84	0.25	0.79	0.22	56.12	25.19	67.80	24.86
$A_{sminxw1}$ (cm ²)	44.25	44.25	48.23	48.23	33.31	7.21	26.35	7.21
A_{spxw1} (cm ²)	44.25	44.25	48.23	48.23	56.12	25.19	67.80	24.86
A_{smxw2} (cm ²)	0.84	0.22	0.79	0.14	75.35	25.19	92.62	24.86
$A_{sminxw2}$ (cm ²)	28.59	38.28	30.91	30.91	33.31	7.21	26.35	7.21
A_{spxw2} (cm ²)	28.59	38.28	30.91	30.91	75.35	25.19	92.62	24.86
A_{sti} (cm ²)	104.76	135.99	152.86	152.46	93.77	42.36	102.24	50.46
A_{sts} (cm ²)	180.12	184.28	198.99	198.59	132.48	51.84	133.20	59.94
V_s (cm ³)	140754.48	149596.40	150814.90	150380.12	1464836.80	212811.52	1528694.00	236297.60

Dimensionamento completo de sapatas combinadas retangulares, considerando que a área de contato com o solo está parcialmente comprimida.